ÜBER DAS LOGARITHMISCHE POTENTIAL EINER MATERIELLEN FLÄCHE, DEREN RANDKURVE DURCH INVERSION EINER PARABEL ENTSTANDEN IST

Inaugural-Dissertation zur
Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

an der

Vereinigten Friedrichs-Universität
Halle-Wittenberg

Vorgelegt von

HERMANN SCHÜTZE

aus

TANGERMÜNDE

HALLE 1919

ÜBER DAS LOGARITHMISCHE POTENTIAL EINER MATERIELLEN FLÄCHE, DEREN RANDKURVE DURCH INVERSION EINER PARABEL ENTSTANDEN IST

Inaugural-Dissertation zur
Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

an der

Vereinigten Friedrichs-Universität
Halle-Wittenberg

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Vorgelegt von

HERMANN SCHÜTZE

aus

TANGERMÜNDE

H A L L E 1 9 1 9

Referent:

Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Wangerin

Alle Rechte vorbehalten

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

In Band 31 der Abhandlungen der mathemathisch-physikalischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften gibt C. Neumann die Abteilung des logarithmischen Potentials einer Ovalfläche, deren Randkurve aus einer Ellipse durch Transformation vermittels reziproker Radien entsteht. Dieselben Ergebnisse fand auf anderem Wege W. Geiger in einer Dissertation (Halle 1912). Herr Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Wangerin weist in seiner Abhandlung »Über das Potential gewisser Ovaloide« darauf hin, daß sich das Potential für äußere Punkte auch durch Anwendung von Polarkoordinaten finden lassen muß, und führt die Rechnung durch für zwei Spezialfälle.

Ich habe diesen Lösungsweg eingeschlagen, um das logarithmische Potential in bezug auf äußere Punkte für den Fall zu erhalten, daß die Randkurve der materiellen Fläche durch Inversion einer Parabel von einem inneren Punkte aus entsteht. Meine Ergebnisse sind der Form nach analog den Neumannschen. Auch habe ich im zweiten und vierten Kapitel meiner Arbeit gezeigt, daß meine im ersten und dritten Kapitel erhaltenen Resultate sich auch durch Grenzbetrachtungen aus den Neumannschen herleiten lassen.

Allgemeiner Ansatz.

Es ist der Arbeit einiges vorauszuschicken, was alle Rechnungen gemeinsam angeht. Die Parabel wird durch die Gleichung

$$(y_0 - Y)^2 = 2p\,(x_0 - X)$$

gegeben, so daß x_0 und y_0 die Koordinaten ihres Scheitels sind, während ihre Achse parallel der negativen X-Achse verläuft. Der Koordinatenanfangspunkt soll Mittelpunkt des Inversionskreises mit dem Radius R sein. Man findet dann die Gleichung der Randkurve der materiellen Fläche durch die Transformation

$$X = \frac{R^2 \cdot x_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{und} \quad Y = \frac{R^2 \cdot y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Aus der so erhaltenen Gleichung berechnet man nach Einführung der Polarkoordinaten

$$x_1 = \overline{r_1} \cdot \cos \varphi_1 \quad \text{und} \quad y_1 = \overline{r_1} \cdot \sin \varphi_1$$

den Wert des Radiusvektors $\overline{r_1}$ als Funktion von φ_1. Die Polarkoordinaten sollen folgendermaßen durch Indizes gekennzeichnet werden:

$\overline{r_1}$, φ_1 beziehen sich auf einen Punkt der Randkurve,
r_1, φ_1 auf einen Punkt der materiellen Fläche,
r, φ auf den Aufpunkt, der gemäß der oben angegebenen Vorbemerkung außerhalb der materiellen Fläche liegen soll. Das logarithmische Potential wird zunächst für solche äußeren Punkte hergeleitet, für die r größer ist als der größeste Wert von r_1. Hinterher läßt sich dann zeigen, daß das Resultat für alle äußeren Punkte gilt.[1])

Die Dichtigkeit der materiellen Fläche setze ich gleich 1. Dann gilt für ihre logarithmische Potential die Formel

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\overline{r_1}} \log\left(\frac{1}{E}\right) r_1 \, dr_1,$$

wo E den Abstand des Aufpunktes vom Massenelement bedeutet. Da $r > r_1$ ist, läßt $\log\left(\frac{1}{E}\right)$ in die Reihe entwickeln

$$\log\left(\frac{1}{E}\right) = \log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{r_1^n}{r^n} \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi). \tag{1}$$

Nach Ausführung der Integration über r_1 wird

$$V = J_0 \cdot \log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot J_n, \tag{2}$$

worin J_0 gleich der anziehenden Masse ist. Es wird

$$\mathsf{M} = J_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \overline{r_1}^2 \cdot d\varphi_1 \tag{3}$$

und

$$J_n = \frac{1}{n+2} \int_0^{2\pi} \overline{r_1}^{n+2} \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi) \, d\varphi_1. \tag{4}$$

Die Integrationen werden nach Einsatz der für $\overline{r_1}$ gefundenen Werte ausgeführt und darauf die Summierungen gemäß Formel (2) vollzogen.

---

[1]) In Bezug auf diesen Nachweis vergleiche man die eingangs erwähnte Abhandlung von Herrn Prof. Wangerin, S. 8 und 11, wie auch die dort zitierte Arbeit von Herrn H. Liebmann (Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 59, 378—386, 1907).

I. Kapitel

Das Inversionszentrum liegt auf der Achse der Parabel

Es sind hier drei Fälle zu unterscheiden, die in den drei folgenden Paragraphen nacheinander behandelt werden sollen.

§ 1. Das Inversionszentrum liegt im Brennpunkt der Parabel.

In diesem Falle sind die Koordinaten des Scheitels der Parabel

$$x_0 = \frac{p}{2}, \quad y_0 = 0,$$

und ihre Gleichung lautet

$$Y^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - X\right).$$

Die Inversion führt auf die Kardioide

$$p_1^2 (x_1^2 + y_1^2) = [(x_1^2 + y_1^2) - p_1 x_1]^2,$$

worin $\frac{R^2}{p} = p_1$ gesetzt ist. Durch Einführung von Polarkoordinaten folgt

$$p_1^2 = (\overline{r_1} - p_1 \cdot \cos\varphi_1)^2$$

und

$$\overline{r_1} = p_1 (1 + \cos\varphi_1).$$

Nach (3) ist

$$\mathsf{M} = J_0 = \frac{p_1^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi_1)^2 \, d\varphi_1$$

und demnach

$$\mathsf{M} = J_0 = \frac{3\pi \cdot p_1^2}{2}.$$

Durch Einführung des ursprünglichen Wertes von p_1 wird

$$\mathsf{M} = J_0 = \frac{3\pi R^4}{2p^2}.$$

Nach (4) ist ferner

$$(n+2) J_n = p_1^{n+2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi_1)^{n+2} \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi) \, d\varphi_1,$$

und aus

$$(1 + \cos\varphi_1)^{n+2} = \sum_{m=0}^{n+2} \binom{n+2}{m} \cos^m \varphi_1$$

folgt

$$(n+2) J_n = p_1^{n+2} \cdot \sum_{m=0}^{n+2} \binom{n+2}{m} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi_1 \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi) \, d\varphi_1.$$

Die Integrale mit dem Faktor $\sin n\varphi \cdot \sin n\varphi_1$ verschwinden, und es bleibt

$$(n+2) J_n = p_1^{n+2} \cdot \cos n\varphi \cdot \sum_{m=0}^{n+2} \binom{n+2}{m} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi_1 \cdot \cos n\varphi_1 \, d\varphi_1.$$

$\cos^m \varphi_1$ wird in die Reihe von Cosinus der Vielfachen von φ_1 entwickelt:

$$\cos^m \varphi_1 = \frac{1}{2^{m-1}} \left[\cos m\varphi_1 + \binom{m}{1} \cos(m-2)\varphi_1 + \binom{m}{2} \cos(m-4)\varphi_1 + \cdots\right].$$

Da nun

$$\int_0^{2\pi} \cos m_1 \varphi_1 \cdot \cos n \varphi_1 \, d\varphi_1 = 0$$

wird für alle $m_1 \neq n$, so haben nur zwei der Integrale einen endlichen Wert. Für $m = n$ ist es

$$\frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cos n \varphi_1 \cdot \cos n \varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{\pi}{2^{n-1}},$$

und für $m = n + 2$:

$$\frac{(n+2)}{2^{n+1}} \int_0^{2\pi} \cos n \varphi_1 \cdot \cos n \varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{\pi (n+2)}{2^{n+1}}.$$

Man erhält also

$$(n+2) J_n = p_1{}^{n+2} \cdot \cos n \varphi \left[\binom{n+2}{n} \frac{\pi}{2^{n-1}} + \frac{\pi (n+2)}{2^{n+1}} \right]$$

oder

$$J_n = \frac{\pi (2n+3)}{2^{n+1}} \cdot p_1{}^{n+2} \cdot \cos n \varphi.$$

Durch diesen Wert erhält nach (2) das Potential folgende Gestalt:

$$V = \mathsf{M} \cdot \log \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\pi \cdot p_1{}^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2n+3) \frac{\left(\frac{p_1}{2} \right)^n}{r^n} \cdot \cos n \varphi.$$

Die Summe über n zerfällt in die beiden Teilsummen:

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\left(\frac{p_1}{2} \right)^n}{r^n} \cdot \cos n \varphi \quad \text{und} \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p_1}{2} \right)^n}{r^n} \cdot \cos n \varphi.$$

Dadurch wird

$$V = \mathsf{M} \cdot \left[\log \left(\frac{1}{r} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{p_1}{2} \right)^n}{r^n} \cdot \cos n \varphi \right] + \pi \cdot p_1{}^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p_1}{2} \right)^n}{r^n} \cdot \cos n \varphi.$$

Der Klammerausdruck hat die Form (1), stellt also den Wert

$$\log \left(\frac{1}{\triangle} \right)$$

dar, wo $\triangle$ den Abstand des Aufpunktes A vom Punkte

$$P \left(\frac{p_1}{2}, 0 \right)$$

bedeutet. Da $p_1 = \frac{K^2}{p}$ ist, so sind die Koordinaten von P: $\frac{K^2}{2p}$ und 0. Demnach kann man sich P als konjugiert denken dem Punkte $P_1 (2p, 0)$, also dem Scheitel der zur ursprünglichen Parabel konfokalen mit vierfachem Parameter.

Die in V enthaltene zweite Summe läßt sich durch Differentiation von $\log \left(\frac{1}{\triangle} \right)$ nach $\left(\frac{p_1}{2} \right)$ darstellen. Es ist nämlich

$$\frac{p_1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \left(\frac{p_1}{2} \right)} \cdot \log \left(\frac{1}{\triangle} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p_1}{2} \right)^n}{r^n} \cdot \cos n \varphi.$$

Das Ergebnis der ersten Untersuchung ist also folgendes:

Liegt das Inversionszentrum im Brennpunkte der Parabel, so gilt für das Potential:

$$V = \mathsf{M} \cdot \left[\log\left(\frac{1}{\triangle}\right) + K \cdot \frac{\partial}{\partial\left(\frac{p_1}{2}\right)} \cdot \log\left(\frac{1}{\triangle}\right) \right],$$

worin $\triangle$ *den Abstand des Aufpunktes vom Punkte*

$$P\left(\frac{R^2}{2p},\ 0\right)$$

bedeutet und

$$\mathsf{M} = \frac{3\pi R^4}{2p^2}, \quad K = \frac{R^2}{3p} \quad \textit{ist.}$$

Ausgedrückt durch p_1 ist

$$\mathsf{M} \cdot K = \frac{\pi \cdot p_1^5}{2} \quad \text{und} \quad K = \frac{p_1}{3}.$$

Man kommt zu dem gleichen Ergebnis, wenn man — wie Herr Prof. Wangerin auf S. 11 seiner eingangs zitierten Abhandlung angibt — in dem Resultate Ib für die Ellipse $A = B$ setzt. In der Rechnung dieses Paragraphen ist $A = B = p_1$.

§ 2. Das Inversionszentrum liegt auf der Parabelachse zwischen Brennpunkt und Scheitel.

Die Koordinaten des Scheitels sind

$$x_0 < \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad y_0 = 0,$$

die Gleichung der Parabel lautet:

$$Y^2 = 2p(x_0 - X).$$

Die durch Inversion entstandene Randkurve der materiellen Fläche hat die Gleichung

$$q(q x_1^2 + p_1 \cdot y_1^2) = [(x_1^2 + y_1^2) - q x_1]^2,$$

worin $q = \frac{R^2}{2x_0}$ und $p_1 = \frac{R^2}{p}$ ist. Nach Einführung von Polarkoordinaten erhält sie die Gestalt

$$q(q \cdot \cos^2\varphi_1 + p_1 \cdot \sin^2\varphi_1) = (\overline{r_1} - q \cdot \cos\varphi_1)^2$$

oder

$$q(p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1) = (\overline{r_1} - q \cdot \cos\varphi_1)^2.$$

Demnach wird der Radiusvektor

$$\overline{r_1} = q \cdot \cos\varphi_1 + \sqrt{q(p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1)}.$$

Hier ist das positive Wurzelzeichen zu nehmen; denn der Radikand ist gleich $q^2 \cdot \cos^2\varphi_1 + p_1 q \sin^2\varphi_1$; die Wurzel also größer als der absolute Wert von $q\cos\varphi_1$, da p_1 und q beide positiv sind.

Nun ist

$$\mathsf{M} = J_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [q \cdot \cos\varphi_1 + \sqrt{q(p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1)}].$$

Da aber

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi_1 \cdot \sqrt{q(p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1)} \cdot d\varphi_1 = 0$$

ist, so wird $$\mathsf{M} = J_0 = \pi q\left(q + \frac{p_1}{2}\right).$$

Das ist in den ursprünglichen Werten

$$\mathsf{M} = J_0 = \frac{\pi k^4}{4 p x_0^2}(p + x_0).$$

Zur Berechnung von J_n gibt Formel (4)

$$(n+2) J_n = \int_0^{2\pi} [q \cdot \cos\varphi_1 + \sqrt{q(p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1)}]^{n+2} \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Der Klammerausdruck läßt sich in folgende Summe entwickeln:

$$[q \cdot \cos\varphi_1 + \sqrt{q(p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1)}]^{n+2} = \sum_{m=0}^{n+2} \binom{n+2}{m} q^{n+2-m} \cdot \cos\varphi_1{}^{n+2-m} \cdot [q(p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1)]^{\frac{m}{2}}.$$

Dadurch wird

$$(n+2) J_n = \sum_{m=0}^{n+2} \binom{n+2}{m} q^{n+2-m} \cdot q^{\frac{m}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi_1{}^{n+2-m} \cdot [p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1]^{\frac{m}{2}} \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Die Untersuchung der Werte unter dem Integralzeichen für φ_1 und $\pi + \varphi_1$ ergibt, daß alle Integrale mit ungeradem m verschwinden. Es bleibt also

$$(n+2) J_n = \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} q^{n+2-m} \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi_1{}^{n+2-2m} \cdot [p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1]^m \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Da infolge von $x_0 < \frac{p}{2}$ der Ausdruck $(q - p_1) > 0$ sein muß, so läßt sich die Klammer in folgende Reihe entwickeln:

$$[p_1 + (q - p_1)\cos^2\varphi_1]^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p_1{}^{m-k} \cdot (q - p_1)^k \cdot \cos^{2k}\varphi_1,$$

wonach

$$(n+2) J_n = \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} q^{n+2-m} \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p_1{}^{m-k} (q - p_1)^k \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi_1{}^{n+2-2m+2k} \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Nunmehr sind die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi_1{}^{n+2-2m+2k} \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1$$

zu untersuchen. Es verschwinden alle, die $\sin n\varphi \cdot \sin n\varphi_1$ als Faktor enthalten, und es wird

$$(n+2) J_n = \cos n\varphi \cdot \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} q^{n+2-m} \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p_1{}^{m-k} (q - p_1)^k \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi_1{}^{n+2-2m+2k} \cdot \cos n\varphi_1\, d\varphi_1.$$

Hierin haben nur diejenigen Integrale einen von Null verschiedenen Wert, für welche $n+2-2m+2k \geq n$ oder $k+1 \geq m$ ist. Das trifft nur zu in den beiden Fällen $k=m$ und $k=m-1$. Also wird

$$(n+2)\,J_n = \cos n\varphi \cdot \sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \cdot q^{n+2-2m}$$

$$\cdot \Big[(q-p_1)^m \cdot \int_0^{2\pi} \cos^{n+2} \cdot \cos n\varphi_1 \, d\varphi_1 + m p_1 (q-p_1)^{m-1} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^n \varphi_1 \cdot \cos n\varphi_1 \, d\varphi_1 \Big].$$

Nun ist

$$\int_0^{2\pi} \cos^{n+2}\varphi_1 \cdot \cos n\varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{\pi(n+2)}{2^{n+1}} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos^n \varphi_1 \cdot \cos n\varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{\pi}{2^{n-1}}.$$

Dadurch wird

$$(n+2)\,J_n = \frac{\pi \cdot \cos n\varphi}{2^n} \cdot \sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} q^{n+2-m}$$

$$\cdot \Big[\frac{(n+2)(q-p_1)^m}{2} + 2m p_1 (q-p_1)^{m-1} \Big].$$

Der Ausdruck zerfällt in zwei Teilsummen. Der Wert der ersten ist

$$\frac{(n+2)}{2} \cdot \sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} q^{n+2-2m} \cdot [q(q-q_1)]^m = \frac{(n+2)}{4} \Big[(q+q_1)^{n+2} + (q-q_1)^{n+2} \Big],$$

worin zur Vereinfachung $q_1 = \sqrt{q(q-p_1)}$ gesetzt ist. Die zweite Teilsumme

$$\sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \cdot 2m \cdot q^{n+2-2m} q_1^{2m-2}$$

ist gleich dem mit $\frac{p_1 \cdot q}{q_1}$ multiplizierten Differentialquotienten nach q_1 der ersten Summe, falls man in dieser den Faktor $\frac{n+2}{2}$ fortläßt. Also wird

$$J_n = \Big\{ \frac{1}{4} \Big[(q+q_1)^{n+2} + (q-q_1)^{n+2} \Big] + \frac{p_1 \cdot q}{2 q_1} \Big[(q+q_1)^{n+1} - (q-q_1)^{n+1} \Big] \Big\} \cdot \frac{\pi \cdot \cos n\varphi}{2^n}.$$

Werden die Glieder mit $(q+q_1)$ und $(q-q_1)$ für sich zusammengefaßt, so wird

$$J_n = \Big[A \cdot \Big(\frac{q+q_1}{2} \Big)^n + B \cdot \Big(\frac{q-q_1}{2} \Big)^n \Big] \cdot \cos n\varphi,$$

worin

$$A = \pi \cdot \Big[\frac{1}{4}(q+q_1)^2 + \frac{p_1 \cdot q}{2 q_1}(q+q_1) \Big] \quad \text{und} \quad B = \pi \cdot \Big[\frac{1}{4}(q-q_1)^2 - \frac{p_1 \cdot q}{2 q_1}(q-q_1) \Big] \text{ ist.}$$

In den ursprünglichen Werten findet man

$$\frac{q+q_1}{2} = \frac{R^2}{4 x_0} \Big(1 + \sqrt{\frac{p-2x_0}{p}} \Big) \quad \text{und} \quad \frac{q-q_1}{2} = \frac{R^2}{4 x_0} \Big(1 - \sqrt{\frac{p-2x_0}{p}} \Big),$$

somit

$$A = \frac{\pi R^4}{8 p x_0^2} \Big[p + x_0 + p \sqrt{\frac{p}{p-2x_0}} \Big]$$

$$B = \frac{\pi R^4}{8 p x_0^2} \Big[p + x_0 - p \sqrt{\frac{p}{p-2x_0}} \Big].$$

Daraus folgt sofort $A + B = \mathsf{M}$.

Nun ist das Potential

$$V = \mathsf{M}\cdot\log\left(\frac{1}{r}\right) + A\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{q+q_1}{2}\right)^n}{r^n}\cdot\cos n\varphi + B\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{q-q_1}{2}\right)^n}{r^n}\cdot\cos n\varphi.$$

Da aber

$$\mathsf{M}\cdot\log\left(\frac{1}{r}\right) = A\cdot\log\left(\frac{1}{r}\right) + \mathrm{B}\cdot\log\left(\frac{1}{r}\right)$$

ist, so wird

$$V = A\left[\log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{q+q_1}{2}\right)^n}{r^n}\cdot\cos n\varphi\right] + B\left[\log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{q-q_1}{2}\right)^n}{r^n}\cdot\cos n\varphi\right].$$

Gemäß Formel (1) kann man also das Potential auch in folgender Gestalt darstellen:

$$V = A\cdot\log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) + B\cdot\log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right),$$

worin $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Abstände des Aufpunktes von zwei Punkten der X-Achse sind mit den Koordinaten

$$P_1: \quad x_1 = \frac{q+q_1}{2} \qquad y_1 = 0$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{q-q_1}{2} \qquad y_2 = 0$$

oder in den ursprünglichen Werten

$$P_1: \quad x_1 = \frac{R^2}{4x_0}\left(1+\sqrt{\frac{p-2x_0}{p}}\right) \qquad y_1 = 0$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{R^2}{4x_0}\left(1-\sqrt{\frac{p-2x_0}{p}}\right) \qquad y_2 = 0.$$

Die beiden Punkte liegen symmetrisch zum Punkte $P\left[\frac{R^2}{4x_0},\ 0\right]$, einem Punkte, der durch Inversion von $Q\,[4x_0,\ 0]$ entstanden ist. Wie im ersten Falle (§ 1) ist ein Abstand vom Inversionszentrum gleich dem Vierfachen des Scheitelabstandes der gegebenen Parabel. Sobald das Inversionszentrum in den Brennpunkt fällt, wird $\sqrt{\frac{p-2x_0}{p}} = 0$ und beide Punkte P_1 und P_2 fallen in einen zusammen mit den Koordinaten $\left[\frac{R^2}{2p},\ 0\right]$, was dem Ergebnisse des ersten Falles entspricht. Wie auch die übrigen Werte dieses Paragraphen auf die des vorigen zurückzuführen sind, soll die folgende Betrachtung zeigen.

Wenn das Inversionszentrum in den Brennpunkt fällt, so wird

$$\triangle_1 = \triangle_2 = \triangle,$$

und man kann das Potential in der Form

$$V = (A+B)\log\left(\frac{1}{\triangle}\right) + \frac{(A-B)}{2}(x_1-x_2)\cdot\left[\frac{\log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) - \log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right)}{x_1-x_2}\right]$$

schreiben. $A+B = \mathsf{M} = \frac{3\pi h^4}{2p^2}$; $A-B$ aber wird unendlich; da jedoch x_1-x_2 den Wert Null bekommt, so wird

$$(A-B)(x_1-x_2) = 0\cdot\infty;$$

dieser Wert wird hier nach obigen Ausdrücken gleich $\frac{\pi R^6}{2p^3}$, wenn man $2x_0 = p$ setzt. Es ist also $(A-B)(x_1-x_2) = \mathsf{M}\cdot K$ für $2x_0 = p$, und somit wird

$$V = \mathsf{M}\cdot\left[\log\left(\frac{1}{\triangle}\right) + K\cdot\frac{d}{dx}\log\left(\frac{1}{\triangle}\right)\right];$$

da aber $x = \frac{p_1}{2}$ ist, so haben wir völlige Übereinstimmung mit dem Resultate des ersten Paragraphen erzielt.

Ich komme noch einmal auf das oben gewonnene Ergebnis dieses Paragraphen zurück und bemerke, daß die beiden Punkte P_1 und P_2 im Inneren der materiellen Fläche liegen müssen; denn es ist

$$0 < \sqrt{\frac{p-2x_0}{p}} < 1,$$

also auch

$$0 < \frac{R^4}{4x_0}\left(1 \pm \sqrt{\frac{p-2x_0}{p}}\right) < \frac{R^2}{2x_0},$$

während die Achse der materiellen Fläche sich vom Anfangspunkte des Koordinatensystems bis zu $\frac{R^2}{x_0}$, dem zum Parabelscheitel konjugierten Punkte erstreckt.

Das Ergebnis für diesen Fall läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Das logarithmische Potential der materiellen Fläche ist ersetzbar durch das zweier innerer Punkte

$$P_1: \quad x_1 = \frac{R^2}{4x_0}\left(1 + \sqrt{\frac{p-2x_0}{p}}\right) \qquad y_1 = 0$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{R^2}{4x_0}\left(1 - \sqrt{\frac{p-2x_0}{p}}\right) \qquad y_2 = 0,$$

die mit den konstanten Massen A und B versehen gedacht sind, so daß $A + B = \mathsf{M}$ *und*

$$A = \frac{\pi R^4}{8px_0^2}\left[p + x_0 + p\sqrt{\frac{p}{p-2x_0}}\right]$$

$$B = \frac{\pi R^4}{8px_0^2}\left[p + x_0 - p\sqrt{\frac{p}{p-2x_0}}\right]$$

ist. Die Formel des Potentials lautet:

$$V = A\cdot\log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) + B\cdot\log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right).$$

§ 3. Das Inversionszentrum liegt auf der Parabelachse außerhalb der Strecke Brennpunkt — Scheitel.

In diesem Falle sind die Koordinaten des Scheitels

$$x_0 > \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad y_0 = 0.$$

Für die Gesamtmasse M der materiellen Fläche gilt die Formel des § 2. Auch bleiben für J_n die gleichen Entwicklungen eingangs der Rechnung. Da aber $q - p_1 < 0$ wird, so tritt an die Stelle der dortigen Summe über k folgende Summierung:

$$[p_1 - (p_1 - q)\cos^2\varphi_1]^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \cdot p_1^{m-k} \cdot (p_1 - q)^k \cdot \cos^{2k}\varphi_1,$$

und es wird

$$(n+2)\,J_n = \frac{\pi \cdot \cos n\varphi}{2^n} \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} q^{n+2-m} \cdot \left[(-1)^m \cdot \frac{(n+2)\,(p_1-q)^m}{2} + 2 \cdot (-1)^{m-1} \cdot m \cdot p_1 (p_1-q)^{m-1}\right]$$

oder

$$(n+2)\,J_n = \left[\frac{n+2}{2} \cdot S_1 - \frac{q \cdot p_1}{q_1} \cdot S_2\right] \frac{\pi \cdot \cos n\varphi}{2^n},$$

wo

$$S_1 = \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} (-1)^m \cdot \binom{n+2}{2m} q^{n+2-2m} \cdot q_1^{2m}$$

$$S_2 = \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} (-1)^m \cdot \binom{n+2}{2m} 2m \cdot q^{n+2-2m} \cdot q_1^{2m-1}$$

und $q_1 = \sqrt{q\,(p-1)}$ ist. Es wird

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[(q + i q_1)^{n+2} + (q - i q_1)^{n+2}\right].$$

Ferner findet man durch Differentiation

$$S_2 = \frac{\partial S_1}{\partial q_1} = \frac{(n+2)}{2}\left[(q + i q_1)^{n+1} - (q - i q_1)^{n+1}\right] \cdot i.$$

Diese Werte ergeben

$$J_n = \left\{\frac{1}{4} \cdot \left[(q + i q_1)^{n+2} + (q - i q_1)^{n+2}\right] - \frac{i \cdot p_1 \cdot q}{2 q_1}\left[(q + i q_1)^{n+1} - (q - i q_1)^{n+1}\right]\right\} \frac{\pi \cdot \cos n\varphi}{2^n}.$$

Nach Trennung der Potenzen von $(q + i q_1)$ und $(q - i q_1)$ wird

$$J_n = A \cdot \left(\frac{q + i q_1}{2}\right)^n \cdot \cos n\varphi + B \left(\frac{q - i q_1}{2}\right)^n \cdot \cos n\varphi,$$

wo

$$A = \pi\left[\left(\frac{q + i q_1}{2}\right)^2 - i \cdot \frac{p_1 \cdot q}{q_1}\left(\frac{q + i q_1}{2}\right)\right]$$

$$B = \pi\left[\left(\frac{q - i q_1}{2}\right)^n + i \cdot \frac{p_1 \cdot q}{q_1}\left(\frac{q - i q_1}{2}\right)\right].$$

Man setze nun

$$q \pm i q_1 = \varrho\,(\cos\psi \pm i \sin\psi),$$

so daß $\varrho^2 = q^2 + q_1^2 = q \cdot p_1$ und $\operatorname{tg}\psi = \frac{q_1}{q}$ wird. J_n erhält dadurch folgende Gestalt:

$$J_n = A \cdot \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n (\cos n\psi + i \cdot \sin n\psi) \cos n\varphi + B \cdot \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n (\cos n\psi - i \cdot \sin n\psi) \cos n\varphi$$

oder

$$J_n = (A + B)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \cdot \cos n\psi \cdot \cos n\varphi + i\,(A - B)\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \cdot \sin n\psi \cdot \cos n\varphi.$$

Nun ist

$$A + B = \pi \cdot q\left(q + \frac{p_1}{2}\right) = \mathsf{M}$$

und

$$i\,(A - B) = 2C = -\frac{\pi}{2}\left(q \cdot q_1 - \frac{p_1 \cdot q^2}{q_1}\right).$$

Ausgedrückt durch die ursprünglichen Werte wird

$$C = + \frac{\pi R^4}{8 x_0^2} \cdot \sqrt{\frac{p}{2x - p}}.$$

Es ist also

$$J_n = \mathsf{M} \cdot \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \cdot \cos n\psi \cdot \cos n\varphi + 2C \cdot \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \cdot \sin n\psi \cdot \cos n\varphi,$$

oder nach Einführung anderer trigonometrischer Werte für $\cos n\psi \cdot \cos n\varphi$ und $\sin n\psi \cdot \sin n\varphi$:

$$J_n = \frac{\mathsf{M}}{2}\left[\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \cdot \cos n(\varphi + \psi) + \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \cdot \cos n(\varphi - \psi)\right] + C \cdot \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \left[\sin n(\varphi + \psi) - \sin n(\varphi - \psi)\right].$$

Dann ist das Potential

$$V = \frac{\mathsf{M}}{2}\left[\log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \cos n(\varphi + \psi)\right] + \frac{\mathsf{M}}{2} \cdot \left[\log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \cos n(\varphi - \psi) + C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n}{r^n} \left[\sin n(\varphi + \psi) - \sin n(\varphi - \psi)\right].$$

Die beiden ersten Klammerausdrücke lassen sich summieren zu

$$\log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) \quad \text{und} \quad \log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right),$$

wo $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Abstände des Aufpunktes von zwei festen Punkten P_1 und P_2 bilden. Die beiden Punkte liegen symmetrisch zur Parabelachse und haben von ihr den Abstand $\frac{q_1}{2} = \frac{R^2}{4x_0} \cdot \sqrt{\frac{2x_0 - p}{p}}$. Der Punkt P, in dem $\overline{P_1 P_2}$ die Parabelachse schneidet, ist um $\frac{q}{2} = \frac{R^2}{4x_0}$ vom Inversionszentrum entfernt. Er entspricht also genau dem Punkte P des vorigen Falles; auch sind die Abstände der Punkte P_1 und P_2 von ihm die nämlichen geblieben. Demnach haben P_1 und P_2 die Koordinaten

$$P_1: \quad x_1 = \frac{R^2}{4x_0} \qquad y_1 = -\frac{R^2}{4x_0} \cdot \sqrt{\frac{2x_0 - p}{p}}$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{R^2}{4x_0} \qquad y_2 = +\frac{R^2}{4x_0} \cdot \sqrt{\frac{2x_0 - p}{p}}$$

$M P_1$ und $M P_2$ bilden mit der Parabelachse den Winkel $\pm\psi$.

Es ist nun noch nötig, die Summe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n}{r^n} \cdot [\sin n(\varphi + \psi) - \sin n(\varphi - \psi)]$$

zu finden. Dabei benutze ich das Verfahren, welches C. Neumann auf S. 112 ff. der eingangs erwähnten Abhandlung angibt. Es sei $\triangle$ der Abstand des Aufpunktes von irgend einem Punkte π der Geraden $P_1 P_2$. Dann hat π die Koordinaten $\xi = \frac{q}{2}$ und $\eta = \frac{q'}{2}$; der Radiusvektor $M\pi$ sei gleich $\left(\frac{\varrho'}{2}\right)$; er bildet mit r den Winkel χ. Nun ist

$$\log\left(\frac{1}{\triangle}\right) = T = \log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho'}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \cos n\chi .$$

und es sei ferner

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho'}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \sin n\chi .$$

Man bilde

$$T + iS_1 = f(\xi + i\eta),$$

eine monogene Funktion; denn da $\frac{\varrho'}{2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ist, so folgt

$$\left(\frac{\varrho'}{2}\right)^n [\cos n\chi + i \cdot \sin n\chi] = (\xi + i\eta)^n$$

und

$$T + iS_1 = \log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(\xi + i\eta)^n}{r^n}.$$

Es ist also

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial S_1}{\partial \eta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{\partial S_1}{\partial \xi}.$$

Man läßt nun π auf der Geraden von P_1 nach P_2 wandern und bildet das über $P_1 P_2$ sich erstreckende Integral

$$J = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \cdot d\eta - \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot d\xi \right).$$

Nach den letzten Formeln ist auch

$$J = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta} \cdot d\eta + \frac{\partial S_1}{\partial \xi} \cdot d\xi \right) = \int_{P_1}^{P_2} dS_1 .$$

Andererseits ist aber auch

$$J = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{dT}{dn}\, ds ,^{1})$$

wo n die Normale auf $P_1 P_2$ und ds das Linienelement von $P_1 P_2$ bedeutet. Somit wird

$$\int_{P_1}^{P_2} dS_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{dT}{dn} \cdot ds ,$$

oder unter Einsatz des ursprünglichen Wertes von T

$$\int_{P_1}^{P_2} dS_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{d}{dn} \cdot \log\left(\frac{1}{\triangle}\right) ds .$$

Das links stehende Integral ist nichts anderes als die Differenz der Werte von S_1 für P_1 und P_2, also gleich der Reihe S.

Nun läßt sich das Ergebnis dieses Falles folgendermaßen zusammenfassen:

Das logarithmische Potential der Fläche lautet:

$$V = \frac{\mathsf{M}}{2}\left[\log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) + \log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right)\right] + C \cdot \int_{P_1}^{P_2} \frac{d}{dn} \cdot \log\left(\frac{1}{\triangle}\right) ds ,$$

[1]) Über die Ableitung dieser Beziehung vergl. den betreffenden Abschnitt im III. Kapitel, § 3. Es ist hier n diejenige Richtung der Normalen, die zur Fortschreitungsrichtung orientiert ist wie die Y-Achse zur X-Achse.

worin $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Abstände des Aufpunktes von den beiden Punkten

$$P_1: \quad x_1 = \frac{R^2}{4x_0} \qquad y_1 = -\frac{R^2}{4x_0}\cdot\sqrt{\frac{2x_0 - p}{p}}$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{R^2}{4x_0} \qquad y_2 = +\frac{R^2}{4x_0}\cdot\sqrt{\frac{2x_0 - p}{p}}$$

bedeuten und

$$C = +\frac{\pi R^4}{8x_0^2}\cdot\sqrt{\frac{p}{2x_0 - p}}$$

ist. Die materielle Fläche ist also ersetzbar durch zwei Punkte mit den Massen

$$\frac{M}{2} = \frac{\pi R^4}{8px_0^2}(p + x_0)$$

und durch die Gerade $P_2 P_1$ mit der materiellen Doppelbelegung vom konstanten Momente C.

II. Kapitel

Die gewonnenen Ergebnisse werden auch durch Grenzübergang von den Neumannschen abgeleitet

Ein Vergleich meiner Arbeit mit der eingangs angegebenen von C. Neumann zeigt, daß die endgültigen Formeln für das logarithmische Potential beider Flächen der Form nach übereinstimmen. Es soll nun gezeigt werden, daß meine Formeln sich auch aus den Neumannschen durch Grenzübergang ergeben.

§ 1. Vorauszuschickende Bemerkungen.

Die Neumannschen Resultate sind in elliptischen und in ovalen Koordinaten λ, ϑ gegeben. Zur Unterscheidung beider werden die elliptischen Koordinaten in runde, die ovalen in eckige Klammern eingeschlossen. Damit bedeutet die Bezeichung

$$\pi\,[\lambda,\ \vartheta] \quad \text{und} \quad \pi'\,(\lambda,\ \vartheta)$$

zugleich, daß der Punkt π aus π' durch Inversion hervorgegangen ist. Der Punkt $(\lambda,\ \vartheta)$ ist der Schnittpunkt zweier konfokaler Kegelschnitte, nämlich der Ellipse (λ) und des Hyperbelzweiges (ϑ). Bezeichnen ξ, η die auf den Mittelpunkt als Anfangspunkt und die Kegelschnittachsen als Koordinatenachsen bezogenen rechtwinkligen Koordinaten, so besteht zwischen ihnen und den elliptischen folgende Beziehung:

$$\xi + i\eta = -k\cdot\cos(\lambda + i\vartheta),$$

worin $2k$ gleich dem Abstande der beiden Brennpunkte voneinander ist. Es handelt sich nun darum, die elliptischen Koordinaten durch Grenzübergang auf parabolische zu führen. Man entwickelt zu diesem Zweck den Cosinus in die Reihe der Potenzen von $(\lambda + i\vartheta)$ und erhält:

$$\xi + i\eta = -k\left(1 - \frac{(\lambda + i\vartheta)^2}{2!} + \frac{(\lambda + i\vartheta)^4}{4!} - \frac{(\lambda + i\vartheta)^6}{6!} + \cdots\right).$$

Nun wird durch die Transformation $\xi = x_1 - k$ der Koordinatenanfangspunkt in den Brennpunkt verlegt. Gleichzeitig setzt man

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\sqrt{k}}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{k}}.$$

So wird

$$x_1 + i y_1 = \frac{k}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k}} + i \cdot \frac{\vartheta_1}{\sqrt{k}}\right)^2 - \frac{k}{6}\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{k}} + i \cdot \frac{\vartheta_1}{\sqrt{k}}\right)^6 + \cdots$$

Läßt man jetzt k unendlich groß werden, so wird

$$x + i y = \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\vartheta_1)^2.$$

Damit sind die parabolischen Koordinaten gewonnen; denn es wird durch Trennung des reellen Teiles vom imaginären:

$$x = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \vartheta_1^2) \qquad y = \lambda_1 \vartheta_1.$$

Durch Elimination von ϑ_1 erhält man nach links geöffnete konfokale Parabeln

$$y^2 = 2\lambda_1^2\left(\frac{\lambda_1^2}{2} - x\right),$$

deren Parameter λ_1^2 ist. Elimination von λ_1 gibt nach rechts geöffnete Parabeln

$$y^2 = 2\vartheta_1^2\left(\frac{\vartheta_1^2}{2} + x\right)$$

mit demselben Brennpunkte.

C. Neumann bezeichnet die von Hause aus gegebene Ellipse mit L. Die von Hause aus gegebene Parabel hat den Parameter p. Folglich würde man nach dem Grenzübergange an die Stelle von L_1^2 den Wert p setzen müssen.

$$L_1^2 = p.$$

In allen Resultaten tritt bei Neumann ferner die Ellipse $(2L)$ auf. Ihr würde also eine Parabel entsprechen mit dem Parameter

$$4L_1^2 = 4p.$$

Das Inversionsventrum ist gegeben durch die elliptischen Koordinaten (λ_0, ϑ_0); es ist also der Schnittpunkt der Ellipse (λ_0) mit dem Hyperbelzweige (ϑ_0). So würde ihm also entsprechen der Schnittpunkt der beiden Parabeln

$$y^2 = 2\lambda_{01}^2\left(\frac{\lambda_{01}^2}{2} - x\right)$$

und

$$y^2 = 2\vartheta_{01}^2\left(\frac{\vartheta_{01}^2}{2} + x\right),$$

und die Werte der Parameter dieser Parabeln müßten aus der Lage des Inversionszentrums zum Brennpunkte bestimmt werden. Da aber die Koordinaten des Scheitels in Bezug auf das Inversionszentrum durch x_0 und y_0 gegeben sind, so lassen sich λ_{01}^2 und ϑ_{01}^2 durch x_0, y_0 und p ausdrücken.

In den Konstanten A, B, C usw. treten die Ausdrücke Q, q_0 und $\cos\vartheta_0$, $\sin\vartheta_0$ auf. Darin bedeutet

$$Q = e^{-L} \text{ und } \quad q_0 = e^{-\lambda_0}.$$

Durch den Grenzübergang werden Q, q_0 und $\cos\vartheta_0$ gleich 1, während $\sin\vartheta_0$ gleich Null wird.

Nun sind die beiden Punkte π_1 und π_2, die den Punkten P_1 und P_2 meiner Arbeit entsprechen würden, in ovalen Koordinaten gegeben. Sie sind also konjugiert zu den beiden Punkten π_1' und π_2' in denselben elliptischen Koordinaten. Setze ich an die Stelle der konfokalen Kegelschnitte, deren Schnittpunkte π_1' und π_2' sind, die entsprechenden Parabeln, so erhalte ich die zu P_1 und P_2 konjugierten Punkte P_1' und P_2' in Koordinaten, die sich auf den Brennpunkt als Anfangspunkt beziehen. Diese Koordinaten werde ich transformieren, indem ich den Koordinatenanfang in das Inversionszentrum durch Parallelverschiebung verlege. Nun erhalte ich durch Inversion die gesuchten Punkte P_1 und P_2. Das soll nun neben der Abteilung der Konstanten A, B, C usw. in den folgenden drei Paragraphen für die im ersten Kapitel behandelten Fälle ausgeführt werden.

§ 2. Das Inversionszentrum liegt im Brennpunkte.

Das Neumannsche Resultat lautet:

$$V = \mathsf{M}\left[\log\left(\frac{1}{\triangle}\right) + K \cdot \frac{d}{dn}\log\left(\frac{1}{\triangle}\right)\right],$$

wo $\triangle$ *den Abstand des Aufpunktes vom Punkte*

$$\pi\,[2L,\ 0]$$

bedeutet,

$$\mathsf{M} = \frac{4\pi R^4 \cdot Q^2 \cdot (1 + 4Q^2 + Q^4)}{k^2 (1 - Q^2)^4}$$

und

$$K = \frac{2R^2 \cdot Q^2 \cdot (1 + Q^2)^2}{k(1 - Q^2)^2 \cdot (1 + 4Q^2 + Q^4)} \quad \textit{ist.}$$

Der Punkt $\pi'\,(2L,\ 0)$ in elliptischen Koordinaten ist offenbar der Scheitel der Ellipse $(2L)$. Ihr entspricht nach § 1 die Parabel $(4p)$, deren Scheitel also P' ist. P' hat die Koordinaten $x' = 2p$, $y' = 0$; und durch Inversion findet man

$$P: \qquad x = \frac{R^2}{2p} \qquad y = 0,$$

wie I § 1 angibt.

Auch die Konstanten M und K lassen sich sehr schnell überleiten. Da $Q = 1$ ist, wird auch $Q^2 = 1$ und $(1 + 4Q^2 + Q^4) = 6$. Es muß nur noch der Grenzwert für $k\,(1 - Q^2)^2$ gefunden werden. Es ist $Q^2 = e^{-2L}$, also — wenn ich den Wert gleich G setze —

$$G = k\,(1 - e^{-2L})^2 = k\,(1 - 2e^{-2L} + e^{-4L}).$$

Die in der Klammer enthaltenen Potenzen von e werden in Reihen entwickelt und man bekommt

$$G = k\,(4L^2 - 8L^3 + \cdots).$$

Nach Einführung von L_1 und Unendlichwerden von k erhält man

$$\lim G = 4L_1^2,$$

wofür nach § 1 $4p$ zu setzen wäre. Damit erhält man ohne weiteres

$$\mathsf{M} = \frac{3\pi R^4}{2p^2}$$

und

$$K = \frac{R^2}{2p}.$$

Das deckt sich völlig mit den in § 1 erhaltenen Konstanten im ersten Kapitel.

Auch die geometrische Betrachtung, die C. Neumann zur Erläuterung dieses Spezialfalles heranzieht, läßt sich sehr leicht auf die Parabel überleiten. Er bezeichnet die Schnittpunkte der Randkurve mit der großen Achse der Ellipse mit α und α_1 und findet für den Abstand des Punktes π vom Inversionszentrum M_i den Wert

$$M_i \pi = \frac{\alpha - \alpha_1}{4}.$$

Ferner ist die Masse

$$\mathsf{M} = \pi\left(\frac{2(\alpha+\alpha_1)^2 + (\alpha-\alpha_1)^2}{8}\right)$$

und

$$K = \frac{\alpha - \alpha_1}{4(1+\delta)},$$

worin

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha+\alpha_1}\right)^2 \quad \text{ist.}$$

Bei der Kardioide würden sich diese Werte folgendermaßen gestalten: Ihr äußerer Schnittpunkt mit der Achse ist konjugiert zum Parabelscheitel $\frac{p}{2}$, 0, hat also die Koordinaten $\frac{2R^2}{p}$, 0. Der innere Schnittpunkt liegt im Inversionszentrum selber. Also wird

$$\alpha = \frac{2R^2}{p} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 0;$$

und man erhält für den Abstand von P vom Inversionszentrum

$$M_i P = \frac{\alpha - \alpha_1}{4} = \frac{R^2}{2p};$$

ferner wird

$$\delta = \frac{1}{2};$$

und damit erhalten auch M und K die alten Werte. Man kann also den Punkt P einfach dadurch finden, daß man $M_i P$ gleich ein Viertel des Durchmessers der Kardioide macht. Diese Tatsache habe ich auch in § 1 des ersten Kapitels schon angedeutet.

§. 3. Das Inversionszentrum liegt zwischen Brennpunkt und Scheitel.

Man muß hier von dem Falle der Neumannschen Abhandlung ausgehen, in dem das Inversionszentrum außerhalb der beiden Brennpunkte liegt. *Das Ergebnis ist:*

$$V = A \cdot \log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) + B \cdot \log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right),$$

worin $\triangle_1$ *und* $\triangle_2$ *die Abstände des Aufpunktes von den beiden Punkten*

$$\pi_1[2L + \lambda_0,\ 0] \quad \text{und} \quad \pi_2[2L - \lambda_0,\ 0]$$

bedeuten. Ferner ist

$$M = A + B,$$

und

$$A = -\frac{4\pi R^4 \cdot Q^2 \cdot q_0^2 (1 - Q^4 q_0^2)}{k^2 (1-Q^2)^2 (1-Q^2 q_0^2)^2 (1-q_0^2)}$$

$$B = +\frac{4\pi R^4 \cdot Q^2 \cdot q_0^2 (q_0^2 - Q^4)}{k^2 (1-Q^2)^2 (q_0^2 - Q^2)^2 (1-q_0^2)}.$$

Es sind λ_0, 0 die elliptischen Koordinaten des Inversionszentrums M_i. Es liegt also in einem Scheitel der Ellipse (λ_0), der eine Parabel mit $(\lambda_{01})^2$ als Parameter entsprechen würde. Da nun der Abstand des Inversionszentrums vom Brennpunkte dieser Parabel gleich $\left(\frac{p}{2} - x_0\right)$ ist, so hat die Parabel $(\lambda_{01})^2$ den Parameter $(p - 2x_0)$, und es wäre zu setzen

$$(\lambda_{01})^2 = p - 2x_0.$$

Aus den für π_1 und π_2 angegebenen ovalen Koordinaten sieht man, daß die zu ihnen konjugierten Punkte π_1' und π_2' Scheitel der Ellipsen $(2L + \lambda_0)$ und $(2L - \lambda_0)$ sein müssen. Die ihnen entsprechenden Parabeln haben die Parameter

$$(2L_1 + \lambda_{01})^2 = 4p + 4\sqrt{p(p - 2x_0)} + p - 2x_0$$
$$(2L_1 - \lambda_{01})^2 = 4p - 4\sqrt{p(p - 2x_0)} + p - 2x_0.$$

Dadurch erhält man für die Abstände ihrer Scheitel P_1' und P_2' vom Brennpunkte:

$$FP_1' = \frac{1}{2}\left(5p - 2x_0 + 4\sqrt{p(p - 2x_0)}\right)$$
$$FP_2' = \frac{1}{2}\left(5p - 2x_0 - 4\sqrt{p(p - 2x_0)}\right).$$

Da aber $M_i F = \frac{1}{2}(p - 2x_0)$ ist, so werden die Abstände der Punkte P_1' und P_2' vom Inversionszentrum

$$M_i P_1' = FP_1' - FM_i = 2p\left(1 + \sqrt{\frac{p - 2x_0}{p}}\right)$$
$$M_i P_2' = FP_2' - FM_i = 2p\left(1 - \sqrt{\frac{p - 2x_0}{p}}\right).$$

Jetzt wird die Inversion vorgenommen, und damit gilt für die gesuchten Punkte P_1 und P_2:

$$M_i P_1 = \frac{R^2}{2p} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{p - 2x_0}{p}}} \quad \text{und} \quad M_i P_2 = \frac{R^2}{2p} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{p - 2x_0}{p}}}.$$

Demnach werden durch Umformung des Wurzelausdrucks für P_1 und P_2 die Koordinaten gewonnen:

$$P_1: \quad x_1 = \frac{R^2}{4x_0}\left(1 - \sqrt{\frac{p - 2x_0}{p}}\right) \qquad y_1 = 0$$
$$P_2: \quad x_2 = \frac{R^2}{4x_0}\left(1 + \sqrt{\frac{p - 2x_0}{p}}\right) \qquad y_2 = 0.$$

Der Paragraph 2 des ersten Kapitels zeigt das gleiche Ergebnis, doch sind P_1 und P_2 vertauscht. Es entspricht also dem Punkte π_1 bei Neumann der Punkt P_2 meiner Arbeit, und dem Punkte π_2 der Punkt P_1. Dann müssen aber auch den Neumannschen Konstanten A und B die Werte B und A des I § 2 dieser Arbeit zukommen.

Um die Konstante A dem Grenzübergange zugänglich zu machen, gibt man ihr die Gestalt:

$$A = -\frac{4\pi R^4 \cdot Q^2 \cdot q_0^2 \cdot \sqrt{k}(1 - Q^4 q_0^2)}{k(1 - Q^2)^2 \cdot k(1 - Q^2 q_0^2)^2 \cdot \sqrt{k}(1 - q_0^2)}.$$

Im Zähler wird durch unendlich großes k das Produkt $Q^2 \cdot q_0^2 = 1$. Durch Reihenentwicklung wird

$$\sqrt{k}(1 - Q^4 q_0^2) = \sqrt{k}\left[4L + 2\lambda_0 - \frac{(4L + 2\lambda_0)^2}{2!} + \cdot\cdot\right]$$

und $$\lim_{k=\infty} \sqrt{k}(1 - Q^4 \cdot q_0^2) = 4L_1 + 2\lambda_{01} = 4\sqrt{p} + 2\sqrt{p - 2x_0}.$$

Also ist der Grenzwert des Zählers von A gleich $8\pi R^4(2\sqrt{p} + \sqrt{p - 2x_0})$. Im Nenner gibt das Resultat des § 2 ohne weiteres

$$\lim_{k=\infty} k(1 - Q^2)^2 = 4p \quad \text{und} \quad \lim_{k=\infty} k(1 - Q^2 \cdot q_0^2)^2 = (2L_1 + 2\lambda_{01})^2.$$

Es ist aber $$(2L_1 + 2\lambda_{01}) = 8(p - x_0 + \sqrt{p(p - 2x_0)}).$$

Endlich findet man

$$\lim \sqrt{k}(1 - q_0^2) = 2\lambda_{01} = 2\sqrt{p - 2x_0}.$$

Damit wird der Grenzwert des Nenners von A gleich

$$64p \cdot \sqrt{p - 2x_0}(p - x_0 + \sqrt{p(p - 2x_0)})$$

und

$$\lim A = -\frac{\pi R^4(2\sqrt{p} + \sqrt{p - 2x_0})}{8p\sqrt{p - 2x_0}(p - 2x_0 + \sqrt{p(p - 2x_0)})}.$$

Hieraus erhält man durch Umformung der Wurzelausdrücke des Nenners

$$\lim A = -\frac{\pi R^4(p\sqrt{p} - (p + x_0)\sqrt{p - 2x_0})}{8p x_0^2 \cdot \sqrt{p - 2x_0}}$$

und endlich

$$\lim A = \frac{\pi R^4}{8p x_0^2}\left(p + x_0 - p\sqrt{\frac{p}{p - 2x_0}}\right).$$

Dieses Ergebnis entspricht in der Tat dem Werte der Konstanten B im § 2 des ersten Kapitels.

Unterwirft man die Neumannsche Konstante B einer ähnlichen Umgestaltung, wie das oben bei A geschah, und setzt man überdies $(q_0^2 - Q^2) = q_0^2\left(1 - \frac{Q^2}{q_0^2}\right)$ und $(q_0^2 - Q^4) = q_0^2\left(1 - \frac{Q^4}{q_0^2}\right)$, so erhält man

$$B = 4\pi R^4 \cdot \frac{Q^2}{q_0^2} \cdot \frac{\sqrt{k} \cdot \left(1 - \frac{Q^4}{q_0^2}\right)}{k(1 - Q^2)^2 \cdot k\left(1 - \frac{Q^2}{q_0^2}\right)^2 \cdot \sqrt{k}(1 - q_0^2)}.$$

Durch den Grenzübergang werden $\frac{Q^2}{q_0^2} = 1$, $k(1 - Q^2)^2 = 4p$, $\sqrt{k}(1 - q_0^2) = 2\sqrt{p - 2x_0}$. Durch Reihenentwicklung findet man außerdem

$$\lim \sqrt{k}\left(1 - \frac{Q^4}{q_0^2}\right) = 4L_1 - 2\lambda_{01} = 2(2\sqrt{p} - \sqrt{p - 2x_0})$$

und $$\lim \sqrt{k}\left(1 - \frac{Q^2}{q_0^2}\right)^2 = (2L_1 - 2\lambda_{01})^2 = 8(p - x_0 - \sqrt{p(p - 2x_0)}).$$

Dadurch wird

$$\lim B = \frac{\pi R^4(\sqrt{p} - \sqrt{p - 2x_0})}{8p \cdot \sqrt{p - 2x_0} \cdot (p - x_0 - \sqrt{p(p - 2x_0)})},$$

und hieraus durch Umformung der Wurzeln

$$\lim B = \frac{\pi R^4}{8p x_0^2}\left(p + x_0 + p\sqrt{\frac{p}{p - 2x_0}}\right),$$

so daß also der Grenzwert von B dem Werte A des § 2 im vorigen Kapitel entspricht. Damit ist auch für diese Lage des Inversionszentrums die Übereinstimmung meiner Resultate mit den NEUMANNschen nachgewiesen. —

§ 4. Das Inversionszentrum liegt außerhalb der Strecke Scheitel — Brennpunkt.

Das Inversionszentrum hat die elliptischen Koordinaten $\lambda_0 = 0$ *und* ϑ_0. *Das Neumannsche Resultat lautet:*

$$V = \frac{M}{2}\left[\log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) + \log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right)\right] + C \cdot \int_{\pi_1}^{\pi_2} \frac{d}{dn} \log\left(\frac{1}{\triangle}\right) ds.$$

wo $\triangle_1$ *und* $\triangle_2$ *die Abstände des Aufpunktes von den beiden Punkten*

$$\pi_1 [2L, -\vartheta_0] \quad \text{und} \quad \pi_2 [2L, +\vartheta_0]$$

bedeuten. Ferner ist

$$\frac{M}{2} = \frac{2\pi R^4}{k_2} \cdot \frac{Q^2 \cdot [(1 + 2Q^2 - 2Q^4 + 2Q^6 + Q^8) - 4Q^4 \cdot \cos 2\vartheta_0]}{(1 - Q^2)^2 \cdot (1 - 2Q^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + Q^4)^2}$$

und

$$C = \frac{2\pi R^4}{k^2} \cdot \frac{Q^2 (1 - Q^4) \cdot \cos \vartheta_0}{(1 - 2Q^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + Q^4)^2 \cdot \sin \vartheta_0}.$$

Es muß zunächst festgestellt werden, welche Parabel den beiden Hyperbelzweigen $(-\vartheta_0)$ und $(+\vartheta_0)$ entspricht. Das kann nur eine Parabel sein mit dem Parameter $(\vartheta_{01})^2$. Da das Inversionszentrum in ihrem Scheitel liegen soll, so wird $(\vartheta_{01})^2 = 2x_0 - p$. Die beiden Schnittpunkte dieser Parabel mit der entgegengesetzt geöffneten $(4p)$ sind daher die Punkte P_1' und P_2'. Die Gleichungen der beiden Parabeln in Bezug auf den Brennpunkt als Koordinatenanfang lauten:

$$(4L_1^2): \quad \eta_1^2 = 8p(2p - \xi)$$
$$(\vartheta_{01}^2): \quad \eta^2 = 2(2x_0 - p)\left(\frac{2x_0 - p}{2} + \xi\right).$$

Daraus findet man für die Schnittpunkte P_1' und P_2':

$$\xi = \frac{1}{2}(5p - 2x_0) \qquad \eta_1 = \pm 2\sqrt{p(2x_0 - p)}.$$

Durch Verlegung des Koordinatenanfangs in das Inversionszentrum wird:

$$P_1': \quad x_1' = 2p \qquad y_1' = -\sqrt{p(2x_0 - p)}$$
$$P_2': \quad x_2' = 2p \qquad y_2' = +\sqrt{p(2x_0 - p)}.$$

Die Unterscheidung der Wurzelzeichen ist damit begründet, daß dem Hyperbelaste $(-\vartheta_0)$ der untere Zweig, $(+\vartheta_0)$ der obere Zweig der Parabel (ϑ_{01}^2) entspricht. Nun werden P_1' und P_2' transformiert vermittels reziproker Radien gemäß den Beziehungen

$$x = \frac{R^2 \cdot x'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{R^2 \cdot y'}{x'^2 + y'^2},$$

und da $x'^2 + y'^2 = 8px_0$ wird, so erhält man

$$P_1: \quad x_1 = \frac{R^2}{4x_0} \qquad y_1 = -\frac{R^2}{4x_0} \cdot \sqrt{\frac{2x_0 - p}{p}}$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{R^2}{4x_0} \qquad y_2 = +\frac{R^2}{4x_0} \cdot \sqrt{\frac{2x_0 - p}{p}}.$$

Es entsprechen also die Punkte P_1 und P_2 den Punkten π_1 und π_2. Da nun im Neumannschen Ergebnisse das mit C verbundene Integral die obere Grenze π_2 hat, während ich P_2 als obere Grenze gewählt habe, so müssen die einander entsprechenden C gleiches Vorzeichen haben. Die Konstante $\frac{M}{2}$ forme ich um in

$$\frac{M}{2} = \frac{2\pi R^4 \cdot k \cdot G}{k(1-Q^2)^2 \cdot k^2 (1 - 2Q^2 \cos 2\vartheta_0 + Q^4)}.$$

Zur Bestimmung von $k \cdot G = k[(1 + 2Q^2 - 2Q^4 + 2Q^6 + Q^8) - 4Q^4 \cdot \cos 2\vartheta_0]$ entwickle ich die einzelnen Summanden in Reihen. Es ist:

$$\begin{array}{llll}
1 + 2Q^2 = 3 & - 4L & + 4L^2 & - \frac{8}{3} L^3 + \cdots \\
- 2Q^4 = - 2 & + 8L & - 16L^2 & + \frac{64}{3} L^3 - \cdots \\
+ 2Q^6 = + 2 & - 12L & + 36L^2 & - \frac{216}{3} L^3 + \cdots \\
+ Q^8 = + 1 & - 8L & + 32L^2 & - \frac{256}{3} L^3 + \cdots \\
- 4Q^4 \cdot \cos 2\vartheta_0 = - 4 & + 16L & - 32L^2 + 8\vartheta_0^2 & + \frac{128}{3} L^3 - \cdots \\
\hline
G = 24L^2 + 8\vartheta_0^2 - 96L^3 - 32L\vartheta_0^2 + \cdots &&&
\end{array}.$$

Durch Grenzübergang wird

$$\lim k \cdot G = 8(3L^2 + \vartheta_{01}^2) = 16(p + x_0).$$

Ferner wird $\lim Q^2 = 1$ und $\lim k(1 - Q^2) = 4p$. Endlich ist noch zu bestimmen $\lim k(1 - 2Q^2 \cos 2\vartheta_0 + Q^4)$. Da

$$2Q^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 = 2 - 4L + 4L^2 - 4\vartheta_0^2 - \frac{8}{3} L^3 \cdots$$

ist, so finde ich

$$\lim k(1 - 2Q^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + Q^4) = 4(L_1^2 + \vartheta_{01}^2) = 8x_0,$$

also $$\lim k^2(1 - 2Q^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + Q^4) = 64 x_0^2.$$

Diese Werte ergeben

$$\lim \frac{M}{2} = \frac{\pi R^4}{8 p x_0^2}(p + x_0),$$

entsprechend dem Resultate in § 3 des ersten Kapitels. Die Konstante C wird:

$$C = \frac{2\pi R^4 \cdot Q^2 \cdot \cos \vartheta_0 \cdot \sqrt{k}(1 - Q^4)}{k^2 (1 - 2Q^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + Q^4)^2 \cdot \sqrt{k} \cdot \sin \vartheta_0}.$$

Hierin gibt Reihenentwicklung und Grenzübertragung:

$\lim \sqrt{k}(1 - Q^4) = 4L_1 = 4\sqrt{p}$ und $\lim \sqrt{k} \cdot \sin \vartheta_0 = \vartheta_{01} = \sqrt{2x_0 - p}$,

so daß man erhält

$$C = \frac{\pi R^4}{8 x_0^2} \sqrt{\frac{p}{2x_0 - p}}.$$

Schließlich läßt sich auch noch die Übereinstimmung zeigen für diejenigen Werte, die C. Neumann gefunden hat für den Abstand $\pi_1 \pi_2$ und für die Entfernung des Schnittpunkts π der Geraden $\pi_1 \pi_2$ mit der Parabelachse vom Inversionszentrum. Nach § 3 meiner Arbeit müssen diese Werte folgenden entsprechen:

$$P_1 P_2 = \frac{R^2}{2x_0} \cdot \sqrt{\frac{2x_0 - p}{p}} \quad \text{und} \quad M_i P = \frac{R^2}{4x_0}.$$

Die Neumannschen Resultate sind:

$$\pi_1 \pi_2 = \frac{2 R^2 \cdot Q^2 \cdot \cos \vartheta_0}{k (1 - 2 Q^2 \cos 2 \vartheta_0 + Q^4)} \quad \text{und} \quad \pi M_i = \frac{2 R^2 (1 + Q^2) 2 Q^2 \cdot \sin \vartheta_0}{k (1 - Q^2)(1 - 2 Q^2 \cdot \cos 2 \vartheta_0 + Q^4)}.$$

Durch Einsetzung der obigen Grenzwerte, außerdem von $\lim \sqrt{k}(1 - Q^2) = 2\sqrt{p}$, läßt sich ohne weitere Rechnung die Übereinstimmung herbeiführen.

Somit ist also die Aufgabe dieses Kapitels erfüllt. Es ließ sich zeigen, daß die Resultate für den Fall der Ellipse in nahem Zusammenhange stehen mit denen für die Parabel. Auch bot der Grenzübergang eine willkommene Gelegenheit, die Rechnungen dieser Arbeit einer Prüfung zu unterwerfen. —

III. Kapitel

Das Inversionszentrum liegt in einem beliebigen Punkte innerhalb der Parabel

Die bisher behandelten Spezialfälle boten der Rechnung keine besonderen Schwierigkeiten. Sie ließen sich in einfacher Weise entwickeln und mit den Neumannschen Resultaten identifizieren. Umständlicher wird die Rechnung im folgenden ganz allgemeinen Falle, dem nur die eine Einschränkung auferlegt werden soll, daß das Inversionszentrum *innerhalb* der von Hause aus gegebenen Parabel liege. Es ist die Aufgabe dieses Kapitels, in diesem Falle das Potential für äußere Punkte zu berechnen und auf eine Form zu bringen, die jener des Neumannschen Ergebnisses entspricht.

§ 1. Die Berechnung der Masse und die Aufstellung der Integralformel.

Es sind jetzt x_0 und y_0 die Koordinaten des Parabelscheitels, und die Gleichung der Parabel lautet:

$$(y_0 - Y)^2 = 2 p (x_0 - X).$$

Durch Transformation vermittels reziproker Radien erhält man die Gleichung der Randkurve der materiellen Fläche. Sie lautet:

$$R^2 \cdot p_0 \cdot y_1^2 + p_0^2 (p x_1 - y_0 y_1)^2 = [(x_1^2 + y_1^2) - p_0 (p x_1 - y_0 y_1)]^2.$$

Hierin ist zur Vereinfachung gesetzt:

$$p_0 = \frac{k^2}{2 p x_0 - y_0^2}.$$

Da das Inversionszentrum innerhalb der Parabel liegen soll, so ist $y_0^2 < 2 p x_0$, also $p_0 > 0$.

Durch Einführung von Polarkoordinaten erhält man die Gleichung

$$R^2 \cdot p_0 \sin^2 \varphi_1 + p_0^2 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1)^2 = [r_1 - p_0 (p \cos \varphi_1 - y_0 \cdot \sin \varphi_1)]^2.$$

Demnach ist:

$$\overline{r_1} = p_0 (p \cos \varphi_1 - y_0 \cdot \sin \varphi_1) + \sqrt{R^2 \cdot p_0 \cdot \sin^2 \varphi_1 + p_0^2 (p \cos \varphi_1 - y_0 \cdot \sin \varphi_1)^2}.$$

Offenbar kommt hier nur der positive Wurzelwert in Betracht; denn da die Wurzel größer ist als der absolute Wert von $p_0 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1)$, so würde bei negativem Wurzelzeichen auch $\overline{r_1}$ negativ werden.

Ich schreite nun zur Berechnung der Masse der materiellen Fläche. Es ist

$$\mathsf{M} = J_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p_0 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1) + \sqrt{R^2 \cdot p_0 \sin^2 \varphi_1 + p_0^2 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1)^2}]^2 \, d\varphi_1.$$

Führt man die Quadrierung der Klammer aus, so erhält man

$$\mathsf{M} = p_0^2 \int_0^{2\pi} (p \cos \varphi_1 - y_0 \cdot \sin \varphi_1)^2 \, d\varphi_1 + \frac{R^2 \cdot p_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi_1 \, d\varphi_1.$$

Es wird nämlich

$$\int_0^{2\pi} (p \cos \varphi_1 - y_0 \cdot \sin \varphi_1) \cdot \sqrt{R^2 \cdot p_0 \sin^2 \varphi_1 + p_0^2 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1)^2} \cdot d\varphi_1 = 0,$$

wie eine Untersuchung des Integranden für φ_1 und $\pi + \varphi_1$ zeigt. Somit wird

$$\mathsf{M} = \pi p_0 \left[p_0 p^2 + p_0 y_0^2 + \frac{R^2}{2} \right].$$

Setzt man hierin an die Stelle von p_0 einen ursprünglichen Wert, so wird der endgültige Ausdruck für die Masse folgender sein:

$$\mathsf{M} = \frac{\pi R^4}{2 (2 p x_0 - y_0^2)^2} (2 p^2 + 2 p x_0 + y_0^2).$$

Ich gehe nun über zur Aufstellung des allgemeinen Integrales J_n. Nach Formel (4) des allgemeinen Ansatzes hat es folgende Gestalt:

$$(n+2) J_n = \int_0^{2\pi} [p_0 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1) + \sqrt{R^2 \cdot p_0 \sin^2 \varphi_1 + p_0^2 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1)^2}]^{n+2} \cos n (\varphi_1 - \varphi) \, d\varphi_1.$$

Den ganzen unter dem Integrale stehenden Klammerausdruck entwickle ich in die Summe:

$$\sum_{m=0}^{n+2} \binom{n+2}{m} p_0^{n+2-m} (p \cos \varphi_1 - y_0 \cdot \sin \varphi_1)^{n+2-m} \cdot [R^2 \cdot p_0 \cdot \sin^2 \varphi_1 + p_0^2 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1)^2]^{\frac{m}{2}}$$

und erhalte

$$(n+2) J_n = \sum_{m=0}^{n+2} \binom{n+2}{m} p_0^{n+2-m} \cdot \int_0^{2\pi} (p \cos \varphi_1 - y_0 \cdot \sin \varphi_1)^{n+2-m} \cdot [R^2 \cdot p_0 \sin^2 \varphi_1 + p_0^2 (p \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1)^2]^{\frac{m}{2}} \cos n (\varphi_1 - \varphi) \, d\varphi_1.$$

Der Integrand soll jetzt untersucht werden für φ_1 und $\pi + \varphi_1$. Offenbar ändert für beide Winkel der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck weder seinen absoluten Wert noch das Vorzeichen. Für gerades n

bleibt sich auch $\cos n(\varphi_1 - \varphi)$ in beiden Fällen gleich. Jetzt ist aber $(n+2-m)$ nur dann gerade, wenn auch m gerade ist. Für ungerades m hat also der Ausdruck $(p\cos\varphi_1 - y_0\sin\varphi_1)^{n+2-m}$ bei gleichem absoluten Werte entgegengesetztes Vorzeichen. Daher verschwinden alle Integrale mit ungeradem m bei geradem n. Ist n ungerade, so bekommt $\cos n(\varphi_1 - \varphi)$ für φ_1 und $\pi + \varphi_1$ gleichen aber entgegengesetzten Wert. Sollen nun die Integrale von Null verschieden sein, so muß $(n+2-m)$ ungerade sein. Dieser Fall tritt aber für ungerades n nur ein bei geradem m. Also verschwinden auch alle Integrale mit ungeradem m bei ungeradem n. Damit fallen die in den Integranden enthaltenen Wurzelausdrücke fort. Man erhält

$$(n+2)J_n = \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} p_0^{n+2-2m} \cdot \int_0^{2\pi} (p\cos\varphi_1 - y_0\sin\varphi_1)^{n+2-2m} \cdot [R^2 \cdot p_0 \cdot \sin^2\varphi_1 + p_0^2 (p\cos\varphi_1 - y_0\sin\varphi_1)^2]^m \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Schreibt man $R^2 \cdot p_0 = \frac{h^2 \cdot p_0^2}{p_0}$, so kann p_0^{n+2} herausgesetzt werden:

$$\frac{(n+2)}{p_0^{n+2}} \cdot J_n = \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \int_0^{2\pi} (p\cos\varphi_1 - y_0\sin\varphi_1)^{n+2-2m} \cdot \left[\frac{R^2}{p_0}\sin^2\varphi_1 + (p\cos\varphi_1 - y_0\sin\varphi_1)^2\right]^m \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Ich führe zur Vereinfachung der Rechnung jetzt folgende Substitutionen ein:

$$p\cos\varphi_1 - y_0\sin\varphi_1 = \sqrt{p^2 + y_0^2} \cdot \cos(\varphi_1 + \alpha)$$

und $$\frac{R^2}{p_0} \cdot \sin^2\varphi_1 + (p\cos\varphi_1 - y_0\sin\varphi_1)^2 = M + N \cdot \cos 2(\varphi_1 + \beta).$$

Damit kommt J_n auf die Form

$$\frac{(n+2)}{p_0^{n+2}} J_n = \sum_{m=0}^{\leqq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2}^{\,n+2-2m} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^{n+2-2m}(\varphi_1 + \alpha) \cdot [M + N \cdot \cos 2(\varphi_1 + \beta)]^m \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Bevor ich zur Integration schreite, werde ich noch die in den beiden Substitutionen enthaltenen neuen Größen durch die schon vorhandenen ausdrücken. Aus der ersten Substitution ergibt sich ohne weiteres:

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{y_0}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}.$$

Aus der zweiten findet man:

$$M = \frac{p}{2}(p + 2x_0) \quad N\cos 2\beta = \frac{p}{2}(p - 2x_0) \quad N \cdot \sin 2\beta = p\, y_0$$

und $$N = \frac{p}{2}\sqrt{(p - 2x_0)^2 + 4y_0^2}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke läßt sich die Integration und die Aufstellung der Potentialformel verhältnismäßig einfach ausführen. —

§ 2. Die Ausführung der Integration.

Es handelt sich also darum, den Wert des Integrales

$$\frac{(n+2)}{{p_0}^{n+2}} \cdot J_n = \sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \cdot \sqrt{p^2 + {y_0}^2}^{\,n+2-2m} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^{n+2-2m}(\varphi_1 + \alpha) \cdot [M + N \cdot \cos 2(\varphi_1 + \beta)]^m \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1$$

zu ermitteln. Der im Integral enthaltene Klammerausdruck läßt sich in die Summe entwickeln

$$[M + N \cdot \cos 2(\varphi_1 + \beta)]^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot M^{m-k} \cdot N^k \cdot \cos^k 2(\varphi_1 + \beta),$$

und J_n wird:

$$\frac{(n+2)}{{p_0}^{n+2}} J_n = \sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \cdot \sqrt{p^2 + {y_0}^2}^{\,n+2-2m} \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} M^{m-k} \cdot N^k \cdot \int_0^{2\pi} \cos^{n+2-2m}(\varphi_1 + \alpha) \cdot \cos^k 2(\varphi_1 + \beta) \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Nun sind nur diejenigen Integrale von Null verschieden, für die

$$n + 2 - 2m + 2k \geq n$$

ist. Es muß also entweder $k = m$ oder $k = m - 1$ sein. Daher erhält man:

$$\frac{(n+2)}{{p_0}^{n+2}} J_n = \sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \cdot \sqrt{p^2 + {y_0}^2}^{\,n+2-2m} \cdot \Big[N^m \int_0^{2\pi} \cos^{n+2-2m}(\varphi_1 + \alpha) \cdot \cos^m 2(\varphi_1 + \beta) \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1 + m \cdot M \cdot N^{m-1} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^{n+2-2m}(\varphi_1 + \alpha) \cdot \cos^{m-1} 2(\varphi_1 + \beta) \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1 \Big].$$

Die Potenzen der Cosinus lassen sich in Summen von Cosinus der Vielfachen der Winkel entwickeln. So wird im ersten Integrale des Klammerausdrucks

$$\cos^{n+2-2m}(\varphi_1 + \alpha) = \frac{1}{2^{n+1-2m}} \cdot \Big[\cos(n+2-2m)(\varphi_1 + \alpha) + (n+2-2m) \cos(n-2m)(\varphi_1 + \alpha) + \binom{n+2-2m}{2} \cos(n-2-2m)(\varphi_1 + \alpha) + \cdots \Big]$$

und

$$\cos^m 2(\varphi + \beta) = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \Big[\cos 2m(\varphi_1 + \beta) + m \cdot \cos(2m-4)(\varphi_1 + \beta) + \binom{m}{2} \cos(2m-8)(\varphi_1 + \beta) + \cdots \Big].$$

Die Integranden sind Produkte aus je einem Gliede dieser Summen und $\cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1$. Man erkennt, daß von allen diesen Integralen nur eines einen von Null verschiedenen Wert hat. Es ist das Integral

$$J_a = \int_0^{2\pi} \cos(n-2m)(\varphi_1 + \alpha) \cdot \cos 2m(\varphi_1 + \beta) \cdot \cos n(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi_1.$$

Für das zweite Integral der Klammer gilt neben der schon angegebenen von $\cos^{n+2-2m}(\varphi+\alpha)$ noch die Entwicklung

$$\cos^{m-1}(\varphi_1+\beta) = \frac{1}{2^{m-2}}\cdot\Big[\cos(2m-2)(\varphi_1+\beta) + (m-1)\cos(2m-6)(\varphi_1+\beta) + \binom{m-1}{2}\cos(2m-10)(\varphi_1+\beta)+\cdots\Big].$$

Wieder bleibt von Null verschieden nur ein Integral

$$J_b = \int_0^{2\pi} \cos(n+2-2m)(\varphi_1+\alpha)\cdot\cos(2m-2)(\varphi_1+\beta)\cdot\cos n(\varphi_1-\varphi)\,d\varphi_1.$$

Somit wird

$$\frac{(n+2)}{p_0^{n+2}}J_n = \sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}\sqrt{p^2+y_0^2}^{n+2-2m}\cdot\Big[\frac{(n+2-2m)N^m}{2^{n-m}}J_a + \frac{m\cdot M\cdot N^{m-1}}{2^{n-m-1}}\cdot J_b\Big]$$

$$\frac{2^n(n+2)}{p_0^{n+2}}J_n = \sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}\sqrt{p^2+y_0^2}^{n+2-2m}\cdot\Big\{(n+2-2m)\cdot(2N)^m\cdot J_a + 4m\cdot M(2N)^{m-1}\cdot J_b\Big\}.$$

Nun sollen die Integrale J_a und J_b ermittelt werden. Es wird

$$J_a = \cos n\varphi\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)(\varphi_1+\alpha)\cos 2m(\varphi_1+\beta)\cos n\varphi_1\,d\varphi_1 + \sin n\varphi\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)(\varphi_1+\alpha)\cos 2m(\varphi_1+\beta)\sin n\varphi_1\,d\varphi_1$$

und weiter

$$J_a = \cos n\varphi\cdot\cos 2m\beta\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)(\varphi_1+\alpha)\cos 2m\varphi_1\cdot\cos n\varphi_1\,d\varphi_1 + \sin n\varphi\cdot\cos 2m\beta\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)(\varphi_1+\alpha)\cos 2m\varphi_1\cdot\sin n\varphi_1\,d\varphi_1 - \cos n\varphi\cdot\sin 2m\beta\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)(\varphi_1+\alpha)\sin 2m\varphi_1\cdot\cos n\varphi_1\,d\varphi_1 - \sin n\varphi\cdot\sin 2m\varphi\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)(\varphi_1+\alpha)\sin 2m\varphi_1\cdot\sin n\varphi_1\,d\varphi_1,$$

endlich

$$J_a = \cos n\varphi\cdot\cos 2m\beta\cdot\cos(n-2m)\alpha\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)\varphi_1\cdot\cos 2m\varphi_1\cdot\cos n\varphi_1\,d\varphi_1 + \sin n\varphi\cdot\cos 2m\beta\cdot\cos(n-2m)\alpha\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)\varphi_1\cdot\cos 2m\varphi_1\cdot\sin n\varphi_1\,d\varphi_1 - \cos n\varphi\cdot\cos 2m\beta\cdot\sin(n-2m)\alpha\int_0^{2\pi}\sin(n-2m)\varphi_1\cdot\cos 2m\varphi_1\cdot\cos n\varphi_1\,d\varphi_1$$

$$-\sin n\varphi\cdot\cos 2m\beta\cdot\sin(n-2m)\alpha\int_0^{2\pi}\sin(n-2m)\varphi_1\cdot\cos 2m\varphi_1\cdot\sin n\varphi_1\,d\varphi_1$$

$$-\cos n\varphi\cdot\sin 2m\beta\cdot\cos(n-2m)\alpha\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)\varphi_1\cdot\sin 2m\varphi_1\cdot\cos n\varphi_1\,d\varphi_1$$

$$-\sin n\varphi\cdot\sin 2m\beta\cdot\cos(n-2m)\alpha\int_0^{2\pi}\cos(n-2m)\varphi_1\cdot\sin 2m\varphi_1\cdot\sin n\varphi_1\,d\varphi_1$$

$$+\cos n\varphi\cdot\sin 2m\beta\cdot\sin(n-2m)\alpha\int_0^{2\pi}\sin(n-2m)\varphi_1\cdot\sin 2m\varphi_1\cdot\cos n\varphi_1\,d\varphi_1$$

$$+\sin n\varphi\cdot\sin 2m\beta\cdot\sin(n-2m)\alpha\int_0^{2\pi}\sin(n-2m)\varphi_1\cdot\sin 2m\varphi_1\cdot\sin n\varphi_1\,d\varphi_1.$$

Beachtet man die bekannten Relationen

$$\cos n\varphi_1\cdot\cos 2m\varphi_1=\frac{1}{2}\Big[\cos(n+2m)\varphi_1+\cos(n-2m)\varphi_1\Big]$$

$$\sin n\varphi_1\cdot\sin 2m\varphi_1=\frac{1}{2}\Big[-\cos(n+2m)\varphi_1+\cos(n-2m)\varphi_1\Big]$$

$$\sin n\varphi_1\cdot\cos 2m\varphi_1=\frac{1}{2}\Big[\sin(n+2m)\varphi_1+\sin(n-2m)\varphi_1\Big]$$

$$\cos n\varphi_1\cdot\sin 2m\varphi_1=\frac{1}{2}\Big[\sin(n+2m)\varphi_1-\sin(n-2m)\varphi_1\Big],$$

so erkennt man, daß vier der Integrale verschwinden: nämlich in der ersten und vierten Reihe das letzte, in den anderen beiden das erste. So bleibt:

$$J_a=\frac{\pi}{2}\Big\{\cos n\varphi\cdot\cos 2m\beta\cos(n-2m)\alpha-\sin\cos n\varphi\,2m\beta\cdot\sin(n-2m)\alpha$$
$$-\sin n\varphi\cdot\sin 2m\beta\cos(n-2m)\alpha-\cos n\varphi\cdot\sin 2m\beta\cdot\sin(n-2m)\alpha\Big\}.$$

Eine trigonometrische Umformung dieses Ausdrucks ergibt:

$$J_a=\frac{\pi}{2}\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\cos 2m(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2}\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\sin 2m(\alpha-\beta).$$

Natürlich kann man für das Integral J_b den gleichen Lösungsweg einschlagen. Man erhält:

$$J_b=\frac{\pi}{2}\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\cos 2(m-1)(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2}\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\sin 2(m-1)(\alpha-\beta).$$

Durch Einführung dieser Werte von J_a und J_b wird die Integralformel:

$$\frac{2^n(n+2)}{p_0{}^{n+2}}J_n=\frac{\pi}{2}\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot[n+2]\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}$$
$$\cdot\sqrt{p^2+y_0{}^2}^{n+2-2m}\cdot\sqrt{2N}^{2m}\cdot\cos 2m(\alpha-\beta)$$
$$+\frac{\pi}{2}\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot[n+2]\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}$$
$$\cdot\sqrt{p^2+y_0{}^2}^{n+2-2m}\cdot\sqrt{2N}^{2m}\cdot\sin 2m(\alpha-\beta)+$$

$$+\frac{\pi}{2}\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}\cdot\sqrt{p^2+{y_0}^2}^{\,n+2-2m}$$
$$\cdot[4m\,M(2N)^{m-1}\cdot\cos(2m-1)(\alpha-\beta)-2m(2N)^m\cos 2m(\alpha-\beta)]$$

$$+\frac{\pi}{2}\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}\cdot\sqrt{p^2+{y_0}^2}^{\,n+2-2m}$$
$$\cdot[4m\,M(2N)^{m-1}\cdot\sin(2m-1)(\alpha-\beta)-2m(2N)^m\cdot\sin 2m(\alpha-\beta)].$$

Um die weitere Rechnung übersichtlicher zu gestalten, zerlege ich J_n derart, daß

$$J_n=J_I+J_{II}+J_{III}$$

wird, worin

$$J_I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{{p_0}^{n+2}}{2^n}\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}$$
$$\cdot\sqrt{p^2+{y_0}^2}^{\,n+2-2m}\cdot\sqrt{2N}^{\,2m}\cdot\cos 2m(\alpha-\beta)$$

$$+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{{p_0}^{n+2}}{2^n}\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}$$
$$\cdot\sqrt{p^2+{y_0}^2}^{\,n+2-2m}\cdot\sqrt{2N}^{\,2m}\cdot\sin 2m(\alpha-\beta),$$

ferner

$$J_{II}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{{p_0}^{n+2}}{(n+2)\,2^n}\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\left[\frac{2M}{\sqrt{2N}}-\sqrt{2N}\right]\cos(\alpha-\beta)\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}$$
$$\cdot\sqrt{p^2+{y_0}^2}^{\,n+2-2m}\cdot 2m\cdot\sqrt{2N}^{\,2m-1}\cdot\cos(2m-1)(\alpha-\beta)$$

$$+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{{p_0}^{n+2}}{(n+2)\,2^n}\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\left[\frac{2M}{\sqrt{2N}}+\sqrt{2N}\right]\sin(\alpha-\beta)\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}$$
$$\cdot\sqrt{p^2+{y_0}^2}^{\,n+2-2m}\cdot 2m\cdot\sqrt{2N}^{\,2m-1}\cdot\sin(2m-1)(\alpha-\beta)$$

und endlich

$$J_{III}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{{p_0}^{n+2}}{(n+2)\,2^n}\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\left[\frac{2M}{\sqrt{2N}}-\sqrt{2N}\right]\cos(\alpha-\beta)\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}$$
$$\cdot\sqrt{p^2+{y_0}^2}^{\,n+2-2m}\cdot 2m\cdot\sqrt{2N}^{\,2m-1}\cdot\sin(2m-1)(\alpha-\beta)$$

$$-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{{p_0}^{n+2}}{(n+2)\,2^n}\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\left[\frac{2M}{\sqrt{2N}}+\sqrt{2N}\right]\sin(\alpha-\beta)\cdot\sum_{m=0}^{\leqq\frac{n}{2}+1}\binom{n+2}{2m}$$
$$\cdot\sqrt{p^2+{y_0}^2}^{\,n+2-2m}\cdot 2m\cdot\sqrt{2N}^{\,2m-1}\cdot\cos(2m-1)(\alpha-\beta).$$

Die in diesen Ausdrücken enthaltenen Summen lassen sich ermitteln durch Einführung der Beziehungen

$$\cos 2m(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\left[e^{+i\,2m(\alpha-\beta)}+e^{-i\,2m(\alpha-\beta)}\right]$$
$$\sin 2m(\alpha-\beta)=\frac{1}{2i}\left[e^{+i\,2m(\alpha-\beta)}-e^{-i\,2m(\alpha-\beta)}\right]\text{ usw.}$$

Die erste Summe in J_I wird dann

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \cdot \sqrt{p^2+y_0^2}^{\,n+2-2m} \cdot \sqrt{2N}^{\,2m} \left[e^{+i2m(\alpha-\beta)} + e^{-i2m(\alpha-\beta)}\right].$$

und die Summierung ergibt

$$S_1 = \frac{1}{4}\Big\{\left[\sqrt{p^2+y_0^2}+\sqrt{2N}\cdot e^{-i(\alpha-\beta)}\right]^{n+2} + \left[\sqrt{p^2+y_0^2}-\sqrt{2N}\cdot e^{-i(\alpha-\beta)}\right]^{n+2}$$
$$+\left[\sqrt{p^2+y_0^2}+\sqrt{2N}\cdot e^{-i(\alpha-\beta)}\right]^{n+2} + \left[\sqrt{p^2+y_0^2}-\sqrt{2N}\cdot e^{-i(\alpha-\beta)}\right]^{n+2}\Big\}.$$

Nun ist $e^{i(\alpha-\beta)} = \cos(\alpha-\beta) + i\cdot\sin(\alpha-\beta)$ und $e^{-i(\alpha-\beta)} = \cos(\alpha-\beta) - i\cdot\sin(\alpha-\beta)$; durch die Substitutionen

$$\sqrt{p^2+y_0^2}+\sqrt{2N}\cdot\cos(\alpha-\beta) = \varrho_1\cdot\cos\chi_1;\quad \sqrt{2N}\cdot\sin(\alpha-\beta) = \varrho_1\cdot\sin\chi_1$$
$$\sqrt{p^2+y_0^2}-\sqrt{2N}\cdot\cos(\alpha-\beta) = \varrho_2\cdot\cos\chi_2;\quad \sqrt{2N}\cdot\sin(\alpha-\beta) = \varrho_2\cdot\sin\chi_2$$

wird

$$S_1 = \frac{1}{4}\Big\{\varrho_1^{n+2}[\cos(n+2)\chi_1 + i\cdot\sin(n+2)\chi_1]$$
$$+\varrho_2^{n+2}[\cos(n+2)\chi_2 - i\cdot\sin(n+2)\chi_2]$$
$$+\varrho_1^{n+2}[\cos(n+2)\chi_1 - i\cdot\sin(n+2)\chi_1]$$
$$+\varrho_2^{n+2}[\cos(n+2)\chi_2 + i\cdot\sin(n+2)\chi_2]\Big\}$$

oder

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\varrho_1^{n+2}\cdot\cos(n+2)\chi_1 + \frac{1}{2}\cdot\varrho_2^{n+2}\cdot\cos(n+2)\chi_2.$$

Auf demselben Wege läßt sich auch der Wert der zweiten in J_I enthaltenen Summe ermitteln. Man erhält:

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot\varrho_1^{n+2}\cdot\sin(n+2)\chi_1 - \frac{1}{2}\cdot\varrho_2^{n+2}\cdot\sin(n+2)\chi_2.$$

Man setzt nun S_1 und S_2 in J_I ein und findet durch Umformung der trigonometrischen Ausdrücke

$$J_I = \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\varrho_1^2\cdot\cos 2\chi_1\cdot\left(\frac{p_0\varrho_1}{2}\right)^n\cdot\cos n(\varphi+\alpha-\chi_1) + \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\varrho_2^2\cos 2\chi_2$$
$$\cdot\left(\frac{p_0\varrho_2}{2}\right)^n\cdot\cos n(\varphi+\alpha+\chi_2) + \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\varrho_1^2\cdot\sin 2\chi_1\cdot\left(\frac{p_0\varrho_1}{2}\right)^n$$
$$\cdot\sin n(\varphi+\alpha-\chi_1) - \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\varrho_2^2\sin 2\chi_2\cdot\left(\frac{p_0\varrho_2}{2}\right)^n\cdot\sin n(\varphi+\alpha+\chi_2).$$

In den beiden anderen Ausdrücken J_{II} und J_{III} sind Summen enthalten von der Form

$$\sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}+1} \binom{n+2}{2m} \sqrt{p^2+y_0^2}^{\,n+2-2m}\cdot 2m\cdot\sqrt{2N}^{\,2m-1}\cdot e^{+i(2m-1)(\alpha-\beta)}.$$

Betrachtet man $\sqrt{2N}e^{+(\alpha-\beta)}$ als einfache Größe, etwa gleich r, so kann man sich diese Summe entstanden denken durch Differentiation der in J_I enthaltenen nach r. Daher wird die erste in J_{II} und die zweite in J_{III} enthaltene Summe

$$S_3 = \frac{n+2}{4}\Big\{\left[\sqrt{p^2+y_0^2}+\sqrt{2N}\cdot e^{+i(\alpha-\beta)}\right]^{n+1} - \left[\sqrt{p^2+y_0^2}-\sqrt{2N}\cdot e^{+i(\alpha-\beta)}\right]^{n+1}$$
$$+\left[\sqrt{p^2+y_0^2}+\sqrt{2N}\cdot e^{-i(\alpha-\beta)}\right]^{n+1} - \left[\sqrt{p^2+y_0^2}-\sqrt{2N}\cdot e^{-i(\alpha-\beta)}\right]^{n+1}\Big\}$$

oder

$$S_3 = \frac{n+2}{4}\Big\{\varrho_1^{n+1}[\cos(n+1)\chi_1 + i\cdot\sin(n+1)\chi_1] - \varrho_2^{n+1}[\cos(n+1)\chi_2 - i\cdot\sin(n+1)\chi_2] + \varrho_1^{n+1}[\cos(n+1)\chi_1 - i\cdot\sin(n+1)\chi_1] - \varrho_2^{n+1}[\cos(n+1)\chi_2 + i\cdot\sin(n+1)\chi_2]\Big\}$$

und endlich

$$S_3 = \frac{n+2}{2}\cdot\varrho_1^{n+1}\cdot\cos(n+1)\chi_1 - \frac{n+2}{2}\cdot\varrho_2^{n+1}\cdot\cos(n+1)\chi_2.$$

Ganz ebenso findet man für die zweite in J_{II} und die erste in J_{III} enthaltene Summe

$$S_4 = \frac{n+2}{2}\cdot\varrho_1^{n+1}\cdot\sin(n+1)\chi_1 + \frac{n+2}{2}\cdot\varrho_2^{n+1}\cdot\sin(n+1)\chi_2.$$

Somit wird

$$J_{II} = \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2N}}(M-N)\cos(\alpha-\beta)\cdot\Big[\Big(\frac{\varrho_1\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\varrho_1\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\cos(n+1)\chi_1 - \Big(\frac{\varrho_2\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\varrho_2\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\cos(n+1)\chi_2\Big] + \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2N}}(M+N)\sin(\alpha-\beta)\cdot\Big[\Big(\frac{\varrho_1\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\varrho_1\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\sin(n+1)\chi_1 + \Big(\frac{\varrho_2\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\varrho_2\cdot\cos n(\varphi+\alpha)\cdot\sin(n+1)\chi_2\Big]$$

und

$$J_{III} = \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2N}}(M-N)\cos(\alpha-\beta)\cdot\Big[\Big(\frac{\varrho_1\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\varrho_1\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\sin(n+1)\chi_1 + \Big(\frac{\varrho_2\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\varrho_2\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\sin(n+1)\chi_2\Big] - \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2N}}(M+N)\sin(\alpha-\beta)\cdot\Big[\Big(\frac{\varrho_1\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\varrho_1\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\cos(n+1)\chi_1 - \Big(\frac{\varrho_2\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\varrho_2\cdot\sin n(\varphi+\alpha)\cdot\cos(n+1)\chi_2\Big].$$

Durch einige einfache Umformungen lassen sich J_{II} und J_{III} zusammenfassen und auf folgende Gestalt bringen:

$$J_{II}+J_{III} = \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2N}}\cdot\Big[(M-N)\cos(\alpha-\beta)\varrho_1\cdot\cos\chi_1 + (M+N)\sin(\alpha-\beta)\varrho_1\sin\chi_1\Big]\Big(\frac{\varrho_1\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\cos n(\varphi+\alpha-\chi_1)$$
$$+ \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2N}}\cdot\Big[(M-N)\cos(\alpha-\beta)\varrho_1\cdot\sin\chi_1 - (M+N)\sin(\alpha-\beta)\varrho_1\cos\chi_1\Big]\Big(\frac{\varrho_1\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\sin n(\varphi+\alpha-\chi_1)$$
$$+ \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2N}}\cdot\Big[-(M-N)\cos(\alpha-\beta)\varrho_2\cdot\cos\chi_2 + (M+N)\sin(\alpha-\beta)\varrho_2\sin\chi_2\Big]\Big(\frac{\varrho_2\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\cos n(\varphi+\alpha+\chi_2)$$
$$+ \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2N}}\cdot\Big[(M-N)\cos(\alpha-\beta)\varrho_2\cdot\sin\chi_2 + (M+N)\sin(\alpha-\beta)\varrho_2\cos\chi_2\Big]\Big(\frac{\varrho_2\cdot p_0}{2}\Big)^n\cdot\sin n(\varphi+\alpha+\chi_2).$$

Schließlich kann man alle drei — J_I, J_{II} und J_{III} — zusammenfassen und erhält:

$$J_n = \frac{\pi \cdot p_0^2}{4} \cdot \Big[\varrho_1^2 \cdot \cos 2\chi_1 + \frac{2(M-N)}{\sqrt{2N}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\, \varrho_1 \cos\chi_1 + \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sin(\alpha - \beta)\, \varrho_1 \sin\chi_1 \Big] \Big(\frac{\varrho_1 \cdot p_0}{2} \Big)^n \cdot \cos n(\varphi + \alpha - \chi_1)$$
$$+ \frac{\pi \cdot p_0^2}{4} \cdot \Big[\varrho_2^2 \cdot \cos 2\chi_2 - \frac{2(M-N)}{\sqrt{2N}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\, \varrho_2 \cos\chi_2 + \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sin(\alpha - \beta)\, \varrho_2 \sin\chi_2 \Big] \Big(\frac{\varrho_2 \cdot p_0}{2} \Big)^n \cdot \cos n(\varphi + \alpha + \chi_2)$$
$$+ \frac{\pi \cdot p_0^2}{4} \cdot \Big[\varrho_1^2 \cdot \sin 2\chi_1 + \frac{2(M-N)}{\sqrt{2N}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\, \varrho_1 \sin\chi_1 - \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sin(\alpha - \beta)\, \varrho_1 \cos\chi_1 \Big] \Big(\frac{\varrho_1 \cdot p_0}{2} \Big)^n \cdot \sin n(\varphi + \alpha - \chi_1)$$
$$+ \frac{\pi \cdot p_0^2}{4} \cdot \Big[-\varrho_2^2 \sin 2\chi_2 + \frac{2(M-N)}{\sqrt{2N}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\, \varrho_2 \sin\chi_2 + \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sin(\alpha - \beta)\, \varrho_2 \cos\chi_2 \Big] \Big(\frac{\varrho_2 \cdot p_0}{2} \Big)^n \cdot \sin n(\varphi + \alpha + \chi_2).$$

§ 3. Aufstellung der Potentialformel.

Ich habe im vorigen Paragraphen das allgemeine Integral J_n auf die Form gebracht

$$J_n = A \cdot \Big(\frac{\varrho_1 \cdot p_0}{2} \Big)^n \cdot \cos n(\varphi + \alpha - \chi_1) + B \cdot \Big(\frac{\varrho_2 \cdot p_0}{2} \Big)^n \cdot \cos n(\varphi + \alpha + \chi_2)$$
$$+ C_1 \cdot \Big(\frac{\varrho_1 \cdot p_0}{2} \Big)^n \cdot \sin n(\varphi + \alpha - \chi_1) + C_2 \cdot \Big(\frac{\varrho_2 \cdot p_0}{2} \Big)^n \cdot \sin n(\varphi + \alpha + \chi_2),$$

worin

$$A = \frac{\pi \cdot p_0^2}{4} \Big[\varrho_1^2 \cdot \cos 2\chi_1 + \frac{2(M-N)}{\sqrt{2N}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\, \varrho_1 \cos\chi_1 + \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sin(\alpha - \beta)\, \varrho_1 \sin\chi_1 \Big]$$

$$B = \frac{\pi \cdot p_0^2}{4} \Big[\varrho_2^2 \cdot \cos 2\chi_2 - \frac{2(M-N)}{\sqrt{2N}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\, \varrho_2 \cos\chi_2 + \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sin(\alpha - \beta)\, \varrho_2 \sin\chi_2 \Big]$$

$$C_1 = \frac{\pi \cdot p_0^2}{4} \Big[\varrho_1^2 \cdot \sin 2\chi_1 + \frac{2(M-N)}{\sqrt{2N}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\, \varrho_1 \sin\chi_1 - \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sin(\alpha - \beta)\, \varrho_1 \cos\chi_1 \Big]$$

$$C_2 = \frac{\pi \cdot p_0^2}{4} \Big[-\varrho_2^2 \cdot \sin 2\chi_2 + \frac{2(M-N)}{\sqrt{2N}} \cdot \cos(\alpha - \beta)\, \varrho_2 \sin\chi_2 + \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sin(\alpha - \beta)\, \varrho_2 \cos\chi_2 \Big].$$

Vermittels der zuvor gemachten Substitutionen

$$\varrho_1 \cdot \cos\chi_1 = \sqrt{p^2 + y_0^2} + \sqrt{2N} \cdot \cos(\alpha - \beta) \qquad \varrho_1 \cdot \sin\chi_1 = \sqrt{2N} \cdot \sin(\alpha - \beta)$$
$$\varrho_2 \cdot \cos\chi_2 = \sqrt{p^2 + y_0^2} - \sqrt{2N} \cdot \cos(\alpha - \beta) \qquad \varrho_2 \cdot \sin\chi_2 = \sqrt{2N} \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

lassen sich die Beziehungen aufstellen

$$\varrho_1^2 \cdot \cos 2\chi_1 = p^2 + y_0^2 + 2\sqrt{2N} \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2} \cdot \cos(\alpha - \beta) + 2N \cdot \cos 2(\alpha - \beta)$$
$$\varrho_1^2 \cdot \sin 2\chi_1 = \qquad + 2\sqrt{2N} \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2} \cdot \sin(\alpha - \beta) + 2N \cdot \sin 2(\alpha - \beta)$$

$$\varrho_2^2 \cdot \cos 2\chi_2 = p^2 + y_0^2 - 2\sqrt{2N} \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2} \cdot \cos(\alpha - \beta) + 2N \cdot \cos 2(\alpha - \beta)$$

$$\varrho_2^2 \cdot \sin 2\chi_2 = \quad + 2\sqrt{2N} \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2} \cdot \sin(\alpha - \beta) - 2N \cdot \sin 2(\alpha - \beta).$$

Diese Werte führe ich in die vier Konstanten ein und erhalte:

$$A = \frac{\pi \cdot p_0^2}{4}\left[2p^2 + 2px_0 + y_0^2 + \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2} \cdot \cos(\alpha - \beta)\right]$$

$$B = \frac{\pi \cdot p_0^2}{4}\left[2p^2 + 2px_0 + y_0^2 - \frac{2(M+N)}{\sqrt{2N}} \cdot \sqrt{p^2 + y_0^2} \cdot \cos(\alpha - \beta)\right].$$

Man erkennt sofort, daß $A + B = M$,

gleich der Masse der materiellen Fläche ist.

Weiter findet man

$$C_1 = -\frac{\pi \cdot p_0^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{p^2 + y_0^2}{2N}} \cdot (M - N) \sin(\alpha - \beta)$$

$$C_2 = +\frac{\pi \cdot p_0^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{p^2 + y_0^2}{2N}} \cdot (M - N) \sin(\alpha - \beta).$$

Es ist also $C_1 = -C_2$,

und ich führe ein: $C = +C_1 = -C_2$.

Nun wird das Potential gemäß Formel (2) des allgemeinen Ansatzes

$$V = A \cdot \left[\log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho_1 \cdot p_0}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \cos n(\varphi + \alpha - \chi_1)\right]$$

$$+ B \cdot \left[\log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho_2 \cdot p_0}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \cos n(\varphi + \alpha + \chi_2)\right]$$

$$- C \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho_2 \cdot p_0}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \sin n(\varphi + \alpha + \chi_2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho_1 \cdot p_0}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \sin n(\varphi + \alpha - \chi_1)\right].$$

Die Faktoren von A und B werden

$$\log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) \quad \text{und} \quad \log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right),$$

worin $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Abstände des Aufpunktes von zwei festen Punkten P_1 und P_2 sind. P_1 hat die Koordinaten

$$x_1 = \frac{p_0}{2} \cdot \varrho_1 \cdot \cos(\alpha - \chi_1) \qquad y_1 = -\frac{p_0}{2} \cdot \varrho_1 \cdot \sin(\alpha - \chi_1)$$

und P_2

$$x_2 = \frac{p_0}{2} \cdot \varrho_2 \cdot \cos(\alpha + \chi_2) \qquad y_2 = -\frac{p_0}{2} \cdot \varrho_2 \cdot \sin(\alpha + \chi_2).$$

Mit Hilfe der schon oben benutzten Relationen erhält man

$$P_1: \quad x_1 = \frac{p_0}{2}(p + \sqrt{2N} \cdot \cos\beta) \qquad y_1 = -\frac{p_0}{2}(y_0 + \sqrt{2N} \cdot \sin\beta)$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{p_0}{2}(p - \sqrt{2N} \cdot \cos\beta) \qquad y_2 = -\frac{p_0}{2}(y_0 - \sqrt{2N} \cdot \sin\beta).$$

Die mit dem Faktor C verbundenen Summen lassen sich ganz analog § 3 des ersten Kapitels ermitteln. Es sei $\triangle$ der Abstand des Aufpunktes von irgend einem Punkte π (ξ, η) der Geraden $P_1 P_2$ und $\frac{p_0 \cdot \varrho}{2}$ sei der Abstand dieses Punktes vom Inversionszentrum. Man bilde nun die Reihe

$$T = \log\left(\frac{1}{\triangle}\right) = \log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{p_0 \varrho}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \cos n \psi,$$

worin ψ der Winkel ist, den r und $\left(\frac{p_0 \varrho}{2}\right)$ einschließen. Es soll nun der Wert der Reihe

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{p_0 \varrho}{2}\right)^n}{r^n} \cdot \sin n \psi$$

bestimmt werden.

Offenbar ist $T + i U = f(\xi + i \eta)$

eine monogene Funktion von ξ und η; denn es ist

$$T + i U = \log\left(\frac{1}{r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \left(\frac{q_1}{2}\right)^n \left[\varrho^n (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)^n\right].$$

Also gilt $\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}$.

Man läßt nun π auf der Geraden von P_1 nach P_2 wandern und bildet das sich über $P_1 P_2$ erstreckende Integral

$$J = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \cdot d\eta - \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot d\xi\right).$$

Nach den oben angegebenen Beziehungen ist aber auch

$$J = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot d\eta + \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot d\xi\right) = \int_{P_1}^{P_2} dU.$$

Andererseits ist

$$J = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{dT}{dn} \cdot ds,$$

worin n die Normale auf $P_1 P_2$ und ds das Linienelement von $P_1 P_2$ ist. Dabei ist die Richtung der Normalen so zu wählen, daß sie zur Fortschreitungsrichtung von $P_1 P_2$ ebenso orientiert ist, wie die y-Achse zur x-Achse. Beide Werte setze ich in eine Gleichung und führe wieder den ursprünglichen Ausdruck $\log\left(\frac{1}{\triangle}\right)$ für T ein. So erhalte ich

$$\int_{P_1}^{P_2} dU = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{d}{dn} \log\left(\frac{1}{\triangle}\right) \cdot ds.$$

Nun ist das Integral auf der linken Seite der Gleichung nichts anderes als die Differenz der beiden mit der Konstanten C verbundenen Summen. Man kann der Potentialformel also folgende Form geben

$$V = A \log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) + B \cdot \log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right) + C \int_{P_1}^{P_2} \frac{d}{dn} \log\left(\frac{1}{\triangle}\right) ds.$$

Die materielle Fläche ist also ersetzbar durch zwei Punkte P_1 und P_2 mit den konstanten Massen A und B und eine materielle Doppellinie vom konstanten Momente C.

Nun läßt sich das Resultat des allgemeinen Falles folgendermaßen zusammenfassen:

Der Anfangspunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems sei Mittelpunkt des Inversionskreises vom Radius R und liege innerhalb der Parabel mit dem Parameter p, deren Achse der negativen X-Achse parallel ist und deren Scheitel die Koordinaten x_0, y_0 hat. Dann ermittle man folgende Ausdrücke:

$$p_0 = \frac{R^2}{2px_0 - y_0^2} \qquad M = \frac{p}{2}(p + 2x_0) \qquad N = \frac{p}{2}\sqrt{(p-2x_0)^2 + 4y_0^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{y_0}{\sqrt{p^2 + y_0^2}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{N + \frac{p}{2}(p - 2x_0)}{2N}} \qquad \sin\beta = \sqrt{\frac{N - \frac{p}{2}(p - 2x_0)}{2N}}$$

Das logarithmische Potential der materiellen Fläche von konstanter Dichte 1, deren Randkurve durch Inversion der Parabel entsteht, hat dann die Form

$$V = A \cdot \log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) + B\log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right) + C\int_{P_1}^{P_2} \frac{d}{dn}\log\left(\frac{1}{\triangle}\right) ds.$$

Darin bedeuten $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Abstände des Aufpunktes von den beiden festen Punkten

$$P_1: \quad x_1 = \frac{p_0}{2}(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta) \qquad y_1 = -\frac{p_0}{2}(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{p_0}{2}(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta) \qquad y_2 = -\frac{p_0}{2}(y_0 - \sqrt{2N}\cdot\sin\beta),$$

ferner werden

$$A = \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\left[2p^2 + 2px_0 + y_0^2 + 2(M+N)\cdot\sqrt{\frac{p^2+y_0^2}{2N}}\cdot\cos(\alpha-\beta)\right]$$

und

$$B = \frac{\pi\cdot p_0^2}{4}\cdot\left[2p^2 + 2px_0 + y_0^2 - 2(M+N)\cdot\sqrt{\frac{p^2+y_0^2}{2N}}\cdot\cos(\alpha-\beta)\right],$$

so daß

$$A + B = \frac{\pi\cdot p_0^2}{2}(2p^2 + 2px_0 + y_0^2) = \mathsf{M},$$

gleich der Masse der materiellen Fläche wird.

Endlich ist

$$C = -\frac{\pi\cdot p_0^2}{2}\cdot(M-N)\cdot\sqrt{\frac{p^2+y_0^2}{2N}}\cdot\sin(\alpha-\beta).$$

Damit ist die Aufgabe dieses Kapitels gelöst. Das gewonnene Resultat soll im folgenden Paragraphen dazu benutzt werden, die Ergebnisse des ersten Kapitels zu bestätigen. —

Der auf der vorigen Seite nur angegebene Zusammenhang

$$\frac{\partial T}{\partial\xi}\cdot d\eta - \frac{\partial T}{\partial\eta}\cdot d\xi = -\frac{dT}{dn}\cdot ds$$

ist auf S. 116 f. der Neumannschen Abhandlung bewiesen. Das hier auftretende negative Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung rührt daher, daß ich ein anderes Koordinatensystem als das Neumannsche gewählt habe; die Achsen sind miteinander vertauscht, aber die Normale n ist zur Fortschreitungsrichtung der Kurve ebenso orientiert wie bei Neumann. —

§ 4. Herleitung der Spezialfälle.

Das Inversionszentrum liegt in diesen Fällen auf der Parabelachse; also wird $y_0 = 0$, und damit erhält man aus der allgemeinen Lösung folgende Werte:

$$p_0 = \frac{R^2}{2 p x_0} \qquad M = \frac{p}{2}(p + 2 x_0) \quad \text{und} \quad \alpha = 0.$$

Wenn das Inversionszentrum zwischen Brennpunkt und Scheitel liegt (Kap. I § 2), also $x_0 < \frac{p}{2}$ ist, dann wird

$$N = \frac{p}{2}(p - 2 x_0) \quad \text{und} \quad \beta = 0.$$

Demnach bekommt man für die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2

$$P_1: \quad x_1 = \frac{R^2}{4 x_0}\left(p + \sqrt{\frac{p - 2 x_0}{p}}\right) \qquad y_1 = 0$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{R^2}{4 x_0}\left(p - \sqrt{\frac{p - 2 x_0}{p}}\right) \qquad y_2 = 0,$$

also die Koordinaten wie in I § 2. Es wird ferner

$$A = \frac{\pi R^4}{16 p^2 x_0^2}\left[2 p^2 + 2 p x_0 + 2 p^2 \sqrt{\frac{p}{p - 2 x_0}}\right]$$

$$B = \frac{\pi R^4}{16 p^2 x_0^2}\left[2 p^2 + 2 p x_0 - 2 p^2 \sqrt{\frac{p}{p - 2 x_0}}\right]$$

oder

$$A = \frac{\pi R^4}{8 p x_0^2}\left(p + x_0 + p \sqrt{\frac{p}{p - 2 x_0}}\right)$$

$$B = \frac{\pi R^4}{8 p x_0^2}\left(p + x_0 - p \sqrt{\frac{p}{p - 2 x_0}}\right)$$

und

$$A + B = \mathsf{M} = \frac{\pi R^4}{4 p x_0^2}(p + x_0).$$

Endlich, da $\sin(\alpha - \beta) = 0$, wird auch $C = 0$. Das Resultat entspricht also demjenigen des zweiten Paragraphen von Kapitel I.

Liegt das Inversionszentrum außerhalb der Strecke Brennpunkt — Scheitel (Kapitel I § 3), so ist $x_0 > \frac{p}{2}$. Also wird

$$N = \frac{p}{2}(2 x_0 - p) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 sind

$$P_1: \quad x_1 = \frac{R^2}{4 x_0} \qquad y_1 = -\frac{R^2}{4 x_0} \cdot \sqrt{\frac{2 x_0 - p}{p}}$$

$$P_2: \quad x_2 = \frac{R^2}{4 x_0} \qquad y_2 = +\frac{R^2}{4 x_0} \cdot \sqrt{\frac{2 x_0 - p}{p}},$$

also übereinstimmend. Ferner wird, da jetzt $\cos(\alpha - \beta) = 0$ ist,

$$A = B = \frac{\pi R^4}{8 p x_0^2}(p + x_0),$$

also

$$A = B = \frac{\mathsf{M}}{2}.$$

Endlich erhält man

$$C = -\frac{\pi R^4}{8 x_0^2} \cdot \sqrt{\frac{p}{2 x_0 - p}}.$$

Hier resultiert entgegengesetztes Vorzeichen, das ist aber auch zu fordern, da die Integrationsgrenzen der allgemeinen Lösung denen des I § 3 entgegengesetzt sind. —

IV. Kapitel

Die allgemeine Potentialformel wird auch durch Grenzübergang vom Neumannschen Resultate abgeleitet

Ich gebe zunächst die Neumannsche Lösung in dem Wortlaute wieder, in dem sie auf S. 131 ff. der schon mehrfach erwähnten Abhandlung zu finden ist:

Das Potential der gegebenen materiellen Ovalfläche auf äußere Punkte ist von genau derselben Beschaffenheit, als rührte es her von zwei festen inneren Massenpunkten π_1 und π_2, und überdies von einer diese Punkte miteinander verbindenden Kurve s, selbige versehen gedacht mit einer gewissen materiellen Doppelbelegung von konstantem Moment.

Um über diese Dinge genaueres angeben zu können, erinnere man sich zuvörderst an die von Hause aus gegebenen sechs Konstanten

$$k,\ L,\ \lambda_0,\ \vartheta_0,\ H \text{ und } \varepsilon,$$

ferner an die aus L und λ_0 zusammengesetzten Konstanten

$$\lambda_1 = 2L + \lambda_0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2L - \lambda_0,$$

sowie auch an die zwischen diesen Konstanten stattfindenden Relationen:

$$0 < \lambda_0 < L < \lambda_2 < 2L < \lambda_1.$$

Auf Grund dieser Konstanten und unter Hinzunahme irgend einer Variablen λ bilde man nun die von λ abhängenden Funktionen:

$$u = e^{-(\lambda + \lambda_0)} \quad \text{und} \quad v = e^{-(\lambda - \lambda_0)}$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\lambda) = u^2 - 2uv\cos 2\vartheta_0 + v^2$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\lambda) = 1 - 2uv\cos 2\vartheta_0 + u^2v^2,$$

sowie auch folgende Funktionen:

$$a = a(\lambda) = 4uv\left(\frac{u}{1-u^2}\right)\frac{u(1+v^2) - v(1+u^2)\cos 2\vartheta_0}{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{N}}$$

$$b = b(\lambda) = 4uv\left(\frac{v}{1-v^2}\right)\frac{v(1+u^2) - u(1+v^2)\cos 2\vartheta_0}{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{N}}$$

$$c = c(\lambda) = 4uv\cdot\frac{uv\cdot\sin 2\vartheta_0}{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{N}}.$$

Die Ableitungen dieser Funktionen bezeichne man mit $a'(\lambda)$, $b'(\lambda)$, $c'(\lambda)$, und die Werte dieser Ableitungen für $\lambda = L$ mit

$$a'(L),\quad b'(L),\quad c'(L).$$

Endlich bilde man die drei Konstanten

$$A = -\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot\left(\frac{H^4}{k^2}\right)\cdot a'(L)$$

$$B = -\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot\left(\frac{H^4}{k^2}\right)\cdot b'(L)$$

$$C = -\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right)\cdot\left(\frac{H^4}{k^2}\right)\cdot c'(L),$$

wobei zu bemerken ist, daß mittels der Konstanten A, B die Gesamtmasse M *der betrachteten materiellen Ovalfläche in einfacher Weise ausdrückbar sein wird. Es ist nämlich*

$$\mathsf{M} = A + B.$$

Dies vorausgeschickt, wird man jetzt über jene festen inneren Massenpunkte π_1, π_2 und über jene von π_1 nach π_2 gehende materielle Kurve s nähere Auskunft zu geben imstande sein.

Es besitzen nämlich jene Punkte π_1 und π_2 die ovalen Koordinaten:

$$\pi_1\,[\lambda_1, -\vartheta_0] \quad \textit{und} \quad \pi_2\,[\lambda_2, +\vartheta_0];$$

und ihre Massen sind

$$= A \quad \textit{und} \quad = B.$$

Was ferner die materielle Doppelbelegung der Kurve s anbelangt, so denke man sich auf dieser von π_1 nach π_2 laufenden Kurve s diejenige Normale n errichtet, deren Richtung zur Kurvenrichtung ebenso liegt wie die x-Achse zur y-Achse:

$$n : s = x : y.$$

Alsdann wird das Moment jener Doppelbelegung, in der Richtung n gerechnet

$$= C \textit{ sein.}$$

Entsprechend diesen Angaben wird nun das Potential der gegebenen materiellen Ovalfläche in Bezug auf irgend einen äußeren Punkt π folgendermaßen lauten:

$$V = A\cdot\log\left(\frac{1}{\triangle_1}\right) + B\cdot\log\left(\frac{1}{\triangle_2}\right) + C\int_{\pi_1}^{\pi_2}\frac{d}{dn}\log\left(\frac{1}{\triangle}\right)ds,$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente ds der von π_1 nach π_2 gehenden Kurve s. Dabei bezeichnet n die auf ds errichtete Normale, und zwar diejenige Richtung dieser Normalen, von welcher zuvor schon die Rede war. Ferner bezeichnen $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle$ die Abstände des sollizitierten äußeren Punktes π von den beiden festen Punkten π_1 und π_2 und vom Kurvenelemente ds.

Über die in dieser Lösung enthaltenen Konstanten L, λ_0, ϑ_0 und k ist schon im zweiten Kapitel dieser Arbeit berichtet. Es ist noch zu erwähnen, daß unter H der Radius des Inversionskreises und unter ε die Dichte der materiellen Fläche zu verstehen ist. Man hat also

$$H = R \quad \text{und} \quad \varepsilon = 1$$

zu setzen. Das Inversionszentrum habe in Bezug auf den gemeinsamen Brennpunkt die Koordinaten ξ_0 und η_0. Es ist also aufzufassen als Schnittpunkt der beiden Parabeln

$$\eta_0^2 = 2\lambda_{01}^2\left[\frac{\lambda_{01}^2}{2} - \xi_0\right] \quad \text{und} \quad \eta_0^2 = 2\vartheta_{01}^2\left[\frac{\vartheta_{01}^2}{2} + \xi_0\right],$$

woraus man die Beziehungen erhält:

$$\lambda_{01}^2 - \vartheta_{01}^2 = 2\,\xi_0 \quad \text{und} \quad \lambda_{01}\cdot\vartheta_{01} = \eta_0,$$

und da

$$\xi_0 = \frac{p}{2} - x_0 \quad \text{und} \quad \eta_0 = -y_0$$

ist, so wird $\lambda_{01}^2 - \vartheta_{01}^2 = p - 2x_0$ und $\lambda_{01}\cdot\vartheta_{01} = -y_0$.

Man findet daraus für die gesuchten Parameter

$$\lambda_{01}^2 = \frac{1}{2}\left[p - 2x_0 + \sqrt{(p-2x_0)^2 + 4y_0^2}\right]$$

$$\vartheta_{01}^2 = \frac{1}{2}\left[2x_0 - p + \sqrt{(p-2x_0)^2 + 4y_0^2}\right],$$

oder nach Einführung der im vorigen Kapitel gegebenen Substitutionen

$$\lambda_{01}^2 = \frac{2N}{p}(1+\cos 2\beta) \quad \text{und} \quad \vartheta_{01}^2 = \frac{2N}{p}(1-\cos 2\beta).$$

Endlich erhält man

$$\lambda_{01} = \sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta \quad \text{und} \quad \vartheta_{01} = -\sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\sin\beta.$$

Es ist nämlich für ϑ_{01} das negative Vorzeichen zu nehmen, da

$$\lambda_{01}\cdot\vartheta_{01} = -y_0$$

ist und gemäß dem Neumannschen Resultate stets $\lambda_0 > 0$ sein soll.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit ist bereits angegeben, daß für L der Grenzwert $\sqrt{p}$ zu setzen ist. Man findet daher die beiden zu π_1 und π_2 konjugierten Punkte π' und π'' als Schnitte der Parabeln:

$$\pi': \quad \eta_1^2 = 2\left[2\sqrt{p} + \sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta\right]^2\cdot\left\{\frac{\left[2\sqrt{p}+\sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta\right]^2}{2} - \xi_1\right\}$$

$$\eta_1^2 = 2\cdot\frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta\left[\frac{N}{p}\cdot\sin^2\beta + \xi_1\right]$$

und

$$\pi'': \quad \eta_2^2 = 2\left[2\sqrt{p} - \sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta\right]^2\cdot\left\{\frac{\left[2\sqrt{p}-\sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta\right]^2}{2} - \xi_2\right\}$$

$$\eta_2^2 = 2\cdot\frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta\left[\frac{N}{p}\cdot\sin^2\beta + \xi_2\right].$$

Da bei Neumann der Punkt π_1 die Koordinaten $[2L + \lambda_0, -\vartheta_0]$ hat, so ist für π' einzusetzen $-\vartheta_{01} = +\sqrt{\frac{2N}{p}}\sin\beta$, und entgegengesetzt für π''. Man erhält daher die Koordinaten

$$\pi': \quad \xi_1 = \frac{1}{2}\left[(2\sqrt{p} + \sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta)^2 - \frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta\right]$$

$$\eta_1 = +\sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\sin\beta\left(2\sqrt{p} + \sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta\right)$$

$$\pi'': \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\left[(2\sqrt{p} - \sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta)^2 - \frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta\right]$$

$$\eta_2 = -\sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\sin\beta\left(2\sqrt{p} - \sqrt{\frac{2N}{p}}\cdot\cos\beta\right)$$

oder

$$\pi': \quad \xi_1 = \frac{1}{2}(5p - 2x_0 + 4\sqrt{2N}\cdot\cos\beta) \qquad \eta_1 = y_0 + 2\sqrt{2N}\cdot\sin\beta$$

$$\pi'': \quad \xi_2 = \frac{1}{2}(5p - 2x_0 - 4\sqrt{2N}\cdot\cos\beta) \qquad \eta_2 = y_0 - 2\sqrt{2N}\cdot\sin\beta.$$

Diese Werte sind auf das Inversionszentrum als Koordinatenanfang zu transformieren. Dann werden

$$\pi': \quad x' = 2\,(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta) \qquad y' = 2\,(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)$$
$$\pi'': \quad x'' = 2\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta) \qquad y'' = 2\,(y_0 - \sqrt{2N}\cdot\sin\beta).$$

Nun bleibt nur noch die Inversion auszuführen nach den Beziehungen

$$x = \frac{R^2\cdot x'}{x'^2 + y'^2} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{R^2\cdot y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Es läßt sich nun nachweisen, daß aus der Inversion dieser Punkte π' und π'' die Punkte P_2 und P_1 hervorgehen. Daher müßte also sein:

a) $$x_2 = \frac{R^2\cdot x'}{x'^2 + y'^2}$$

oder

$$\frac{R^2}{2\,(2\,p\,x_0 - y_0^2)}\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta) = \frac{2\,R^2\,(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)}{4\,(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2 + 4\,(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)^2}.$$

Man erhält durch einfache Umformung die Gleichung

$$(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta) + \frac{(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)^2\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)}{(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)} = 2\,p\,x_0 - y_0^2$$

und es wird

$$p^2 - 2N\cdot\cos^2\beta + \frac{(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)^2\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2}{p^2 - 2N\cos^2\beta} = 2\,p\,x_0 - y_0^2$$

oder

$$[(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)]^2 = (p^2 - 2N\cos^2\beta)\,(2\,p\,x_0 - y_0^2 - p^2 + 2N\cos^2\beta).$$

Nun ist:

$$(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta) = p\cdot\sqrt{2N}\cdot\sin\beta - y_0\cdot\sqrt{2N}\cdot\cos\beta,$$

denn es ist $\qquad 2N\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta = N\cdot\sin 2\beta = p\,y_0;$

und daher hat man

$$[(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)]^2 = p^2\cdot 2N\sin^2\beta + y_0^2\cdot 2N\cos^2\beta - 2p^2y_0^2.$$

Also erhält man aus der obigen Gleichung

$$p^2\cdot 2N\cdot\sin^2\beta + y_0^2\cdot 2N\cdot\cos^2\beta - 2p^2y_0^2 = (p^2 - 2N\cos^2\beta)\,(2\,p\,x_0 - y_0^2 - p^2 + 2N\cdot\cos^2\beta).$$

Wenn man die Klammern der rechten Seite durch Ausführung der Multiplikation entfernt und beachtet, daß

$$2N\cdot\cos^2\beta = N + N\cdot\cos 2\beta = N + \frac{p}{2}\,(p - 2x_0)$$

und ebenso $\qquad 2N\cdot\sin^2\beta = N - N\cdot\cos 2\beta = N - \frac{p}{2}\,(p - 2x_0)$

ist, so findet man, daß die N einander aufheben; nach Division der verbleibenden Gleichung mit $\frac{p^2}{2}\,(p - 2x_0)$ erkennt man in dem Ergebnis

$$p - 2x_0 = p - 2x_0,$$

daß die aufgestellte Beziehung in der Tat zu einer identischen Gleichung führt.

b) Es muß ferner die Beziehung

$$y_2 = \frac{R^2\cdot y'}{x'^2 + y'^2}$$

bestehen. Das heißt also, die Gleichung

$$-\frac{R^2(y_0 - \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)}{2(2px_0 - y_0^2)} = \frac{2R^2(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)}{4(p+\sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2 + 4(y_0 + \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)^2}$$

muß identisch sein. Man erhält ganz analog der Rechnung in a)

$$(p+\sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2(y_0 - \sqrt{2N}\cdot\sin\beta)^2 = (2N\cdot\sin^2\beta - 2px_0)(y^2 - 2N\cdot\sin^2\beta)$$

und findet durch Anwendung ebenderselben Hilfsmittel die Bestätigung dieser Beziehung.

Mit Hilfe des hier angewandten Verfahrens erweist sich auch, daß der Punkt „π" durch Inversion in P_1 übergeht. Da die Durchführung ohne wesentliche Änderung vonstatten geht, nenne ich nur ihr Ergebnis.

Ich habe also bisher gefunden, daß den Neumannschen Punkten π_1 und π_2 die Punkte P_2 und P_1 dieser Arbeit entsprechen.

Daher müssen sich die Neumannschen Konstanten A und B, die ja die Massen der Punkte π_1 und π_2 darstellen, in die Konstanten B und A dieser Arbeit überführen lassen, während die beiden einander entsprechenden Konstanten C bei gleichem absoluten Werte entgegengesetztes Vorzeichen haben werden.

Zum Nachweise dieser Übereinstimmung ist es zunächst nötig, die in der Neumannschen Lösung angegebenen Funktionen zu bilden. Es sollen dabei (wie auch in der Neumannschen Abhandlung geschieht) die Abkürzungen $e^{-\lambda_0} = q_0$ und später $e^{-L} = Q$ benutzt werden. Dann sind

$$u = q_0\cdot e^{-\lambda} \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{q_0}\cdot e^{-\lambda};$$

ferner wird

$$uv = e^{-2\lambda}.$$

Man erhält also

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \frac{e^{-2\lambda}}{q_0^2}(1 - 2q_0^2\cdot\cos 2\vartheta_0 + q_0^4)$$

$$\mathfrak{N}(\lambda) = 1 - 2e^{-2\lambda}\cdot\cos 2\vartheta_0 + e^{-4\lambda}.$$

Nun führe ich folgende Abkürzungen ein:

$$\mathfrak{Q} = \frac{4q_0^2}{1 - 2q_0^2\cdot\cos 2\vartheta_0 + q_0^4}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{e^{-2\lambda}}{1 - 2e^{-2\lambda}\cdot\cos 2\vartheta_0 + e^{-4\lambda}}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{q_0^2 - \cos 2\vartheta + e^{-2\lambda} - q_0^2\cdot e^{-2\lambda}\cdot\cos 2\vartheta_0}{1 - q_0^2\cdot e^{-2\lambda}}$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1 - q_0^2\cdot\cos 2\vartheta_0 + q_0^2\cdot e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda}\cdot\cos 2\vartheta_0}{q_0^2 - e^{-2\lambda}}$$

und erhalte somit

$$a(\lambda) = \mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{S}, \quad b(\lambda) = \mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{T} \quad \text{und} \quad c(\lambda) = \mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{R}\cdot\sin 2\vartheta_0.$$

Von diesen drei Ausdrücken sollen die Differentialquotienten nach λ gebildet werden. Da $\mathfrak{Q}$ konstant ist, so wird

$$a'(\lambda) = \mathfrak{Q}\cdot\left[\mathfrak{R}\cdot\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial\lambda} + \mathfrak{S}\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\lambda}\right]$$

$$b'(\lambda) = \mathfrak{Q}\cdot\left[\mathfrak{R}\cdot\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda} + \mathfrak{T}\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\lambda}\right]$$

$$c'(\lambda) = \mathfrak{Q}\cdot\sin 2\vartheta_0\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\lambda}.$$

Durch Differentiation findet man

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \lambda} = -2 \cdot e^{-2\lambda} \frac{(1 - e^{-4\lambda})}{(1 - 2e^{-2\lambda} \cdot \cos 2\vartheta_0 + e^{-4\lambda})^2}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \lambda} = -2 \cdot e^{-2\lambda} \frac{(1 - 2q_0^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + q_0^4)}{(1 - q_0^2 \cdot e^{-2\lambda})^2}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} = -2 \cdot e^{-2\lambda} \frac{(1 - 2q_0^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + q_0^4)}{(q_0^2 - e^{-2\lambda})^2}.$$

Nun findet man die Ableitungen $a'(\lambda)$ usw. durch Einführung dieser Ausdrücke. Setzt man alsdann für λ den Wert L und benutzt die oben angegebene Abkürzung $e^{-L} = Q$, so erhält man

$$a'(L) = -8 q_0^2 \cdot Q^2 \left[\frac{Q^2}{(1 - 2Q^2 \cos 2\vartheta_0 + Q^4)(1 - q_0^2 Q^2)^2} + \frac{(1 - Q^4)(q_0^2 - \cos 2\vartheta_0 + Q^2 - q_0^2 Q^2 \cos 2\vartheta_0)}{(1 - q_0^2 Q^2)(1 - 2q_0^2 \cos 2\vartheta_0 + q_0^4)(1 - 2Q^2 \cos 2\vartheta_0 + Q^4)} \right]$$

$$b'(L) = -8 q_0^2 \cdot Q^2 \left[\frac{Q^2}{(1 - 2Q^2 \cos 2\vartheta_0 + Q^4)(q_0^2 - Q^2)^2} + \frac{(1 - Q^4)(1 - q_0^2 \cos 2\vartheta_0 + q_0^2 Q^2 - Q^2 \cos 2\vartheta_0)}{(q_0^2 - Q^2)(1 - 2q_0^2 \cos 2\vartheta_0 + q_0^4)(1 - 2Q^2 \cos 2\vartheta_0 + Q^4)} \right]$$

$$c'(L) = -8 q_0^2 \cdot Q^2 \frac{(1 - Q^4) \sin 2\vartheta_0}{(1 - 2q_0^2 \cos 2\vartheta_0 + q_0^4)(1 - 2Q^2 \cos 2\vartheta_0 + Q^4)}.$$

Multipliziert man jetzt jeden dieser Ausdrücke mit $\left(-\frac{\pi R^4}{2k^2}\right)$, so hat man die Konstanten A, B und C.

Als Einfachstes soll zuerst die Übereinstimmung der Konstanten C durch Grenzübergang gezeigt werden. Zu diesem Zwecke stelle ich sie folgendermaßen dar:

$$C = \frac{4\pi R^4 \cdot q_0^2 \cdot Q^2 \cdot \sqrt{k}(1 - Q^4) \cdot \sqrt{k} \cdot \sin 2\vartheta_0}{k(1 - 2q_0^2 \cos 2\vartheta_0 + q_0^4) \cdot k^2 (1 - 2Q^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + Q^4)^2}.$$

Es ist nun $$\lim \sqrt{k}(1 - Q^4) = 4L_1 = 4\sqrt{p},$$

entsprechend den Grenzübergängen im zweiten Kapitel. Ferner

$$\lim \sqrt{k} \sin 2\vartheta_0 = 2\vartheta_{01} = -2\sqrt{\frac{2N}{p}} \cdot \sin\beta$$

$$\lim k(1 - 2q_0^2 \cos 2\vartheta_0 + q^4) = 4(\lambda_{01}^2 + \vartheta_{01}^2) = \frac{8N}{p}$$

$$\lim k^2 (1 - 2Q^2 \cdot \cos 2\vartheta_0 + Q^4)^2 = 16(L_1^2 + \vartheta_{01}^2)^2 = \frac{16}{p^2}(p^2 + 2N \cdot \sin^2\beta)^2.$$

Somit findet man:

$$\lim C = -\frac{\pi R^4}{2} \cdot \frac{p^3 \cdot \sin\beta}{\sqrt{2N} \cdot (p^2 + 2N \cdot \sin^2\beta)^2}.$$

Nun erkennt man leicht, daß

$$p^2 + 2N \cdot \sin^2\beta = M + N$$

ist, daß also

$$\lim C = -\frac{\pi R^4}{2} \cdot \frac{p^3 \cdot \sin\beta}{\sqrt{2N} \cdot (M + N)^2}$$

wird. Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit $(M - N)^2$, so erhält man

$$\lim C = -\frac{\pi R^4}{2(2px_0 - y_0^2)^2} \cdot \frac{(M - N)^2 \cdot \sin\beta}{p \cdot \sqrt{2N}}.$$

In meiner Lösung hat die Konstante C den Wert

$$C = -\frac{\pi R^4}{2(2px_0 - y_0^2)^2}\sqrt{\frac{p^2 + y_0^2}{2N}}(M - N)\sin(\alpha - \beta),$$

worin für p_0 sein ursprünglicher Wert gesetzt ist. Beide Konstanten sollen, wie ich oben erklärte, bei gleichem absoluten Werte entgegengesetztes Vorzeichen haben. Das aber trifft nur dann zu, wenn die Gleichung

$$(M - N)\sin\beta = -p\sqrt{p^2 + y_0^2}\cdot\sin(\alpha - \beta)$$

identisch ist. Nun wird

$$\sqrt{p^2 + y_0^2}\cdot\sin(\alpha - \beta) = y_0\cdot\cos\beta - p\cdot\sin\beta,$$

und unsere Beziehung lautet

$$(M - N)\sin\beta = p^2\cdot\sin\beta - p\,y_0\cos\beta.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $2N\sin\beta$, so wird

$$M\cdot 2N\cdot\sin^2\beta - 2N^2\sin^2\beta = p^2\cdot 2N\cdot\sin^2\beta - p^2 y_0^2,$$

und bei Beachtung der Relationen

$$2N\cdot\sin^2\beta = N - N\cdot\cos 2\beta = N - \frac{p}{2}(p - 2x_0)$$

und

$$M = \frac{p}{2}(p + 2x_0)$$

erkennt man, daß die Gleichung in der Tat identisch ist. Es ließ sich also zeigen, daß die beiden Konstanten C von entgegengesetzt gleichem Werte sind.

Im Folgenden soll die Neumannsche Konstante A in die Konstante B dieser Arbeit übergeführt werden. Es ist in zweckmäßiger Form dargestellt

$$A = 4\pi R^4 q_0^2 Q^2\left[\frac{Q^2}{k(1 - 2Q^2\cos 2\vartheta_0 + Q^4)\cdot k(1 - q_0^2 Q^2)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{k}(1 - Q^4)\,k(q_0^2 - \cos 2\vartheta_0 + Q^2 - q_0^2 Q^2\cdot\cos 2\vartheta_0)}{k(1 - 2q_0^2\cos 2\vartheta_0 + q_0^4)\,k^2(1 - 2Q^2\cos 2\vartheta_0 + Q^4)^2\cdot\sqrt{k}(1 - q_0^2 Q^2)}\right].$$

Neu durchzuführen sind folgende Grenzübergänge:

$$\lim k(1 - q_0^2 Q^2)^2 = 4(L + \lambda_{01})^2 = \frac{4}{p}(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2$$

und der größere Klammerausdruck im Zähler des zweiten Bruches. Die einzelnen Entwicklungen lauten hierin:

$$\begin{array}{rrrrrr}
+ q_0^2 = & 1 & -2\lambda_0 & +2\lambda_0^2 & -\cdot\cdot & +\cdot\cdot \\
+ Q^2 = & 1 - 2L & +2L^2 & & -+\cdots & \\
-\cos 2\vartheta_0 = & -1 & & +2\vartheta_0^2 & -+\cdots & \\
\hline
-q_0^2 Q^2\cos 2\vartheta_0 = & -1 + 2L + 2\lambda_0 & -2L^2 - 2\lambda_0^2 & +2\vartheta_0^2 & -4L\lambda_0 & +-\cdots
\end{array}$$

Daher ist

$$\lim k(q_0^2 - \cos 2\vartheta_0 + Q^2 - q_0^2 Q^2\cos 2\vartheta_0) = 4(\vartheta_{01}^2 - L_1\lambda_{01})$$
$$= 4\left(\frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta\right).$$

Man findet also

$$\lim A = \frac{\pi R^4}{4}\left[\frac{p^2}{(p^2 + 2N\sin^2\beta)(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{p^4\left(\frac{2N}{p}\sin^2\beta - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta\right)}{N(p^2 + 2N\sin^2\beta)^2(p + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)}\right],$$

oder, da $p^2 + 2N \cdot \sin^2\beta = M + N$

ist,

$$\lim A = \frac{\pi R^4}{4}\left[\frac{p^2}{(M+N)(p+\sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2} + \frac{p^4\left(\frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta\right)}{N(M+N)^2(p+\sqrt{2N}\cdot\cos\beta)}\right].$$

Man hat nun zu beachten, daß

$$(p+\sqrt{2N}\cdot\cos\beta)(p-\sqrt{2N}\cdot\cos\beta) = M - N$$

und $$M^2 - N^2 = p^2(2px_0 - y_0^2)$$

ist. So ergibt sich

$$\lim A = \frac{\pi R^4}{4(2px_0 - y_0^2)}\left[\frac{(p-\sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2}{M-N} + \frac{p^2(2N - y_0\sqrt{2N}\cdot\sin\beta - p\cdot\sqrt{2N}\cdot\cos\beta}{N(M+N)}\right]$$

denn

$$(p-\sqrt{2N}\cdot\cos\beta)\left(\frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta\right) = 2N - y_0\cdot\sqrt{2N}\cdot\sin\beta - p\sqrt{2N}\cdot\cos\beta,$$

wofür man auch setzen kann

$$2N - \sqrt{2N}\cdot\sqrt{p^2+y_0^2}\cdot\cos(\alpha-\beta).$$

Nach einiger Umformung erhält man so:

$$\lim A = \frac{\pi R^4}{4(2px_0 - y_0^2)^2}\left\{\left[\frac{(M+N)}{p^2}(p^2 + 2N\cdot\cos^2\beta) + 2(M-N)\right] - 2\left[\frac{(M+N)}{p}\cdot\sqrt{2N}\cdot\cos\beta + 2(M-N)\sqrt{\frac{p^2+y_0^2}{2N}}\cdot\cos(\alpha-\beta)\right]\right\}.$$

Es läßt sich nun sehr einfach zeigen, daß

$$\frac{(M+N)}{p^2}(p^2 + 2N\cdot\cos^2\beta) + 2(M-N) = 2p^2 + 2px_0 + y_0^2$$

ist. Um die Übereinstimmung des Grenzwertes mit meiner Konstanten B herzustellen, ist also nur noch nachzuweisen, daß

$$(M+N)\cdot\sqrt{\frac{p^2+y_0^2}{2N}}\cdot\cos(\alpha-\beta) = (M-N)\cdot\sqrt{\frac{p^2+y_0^2}{2N}}\cdot\cos(\alpha-\beta) + \frac{(M+N)}{p}\cdot\sqrt{2N}\cdot\cos\beta$$

eine identische Gleichung ist. Es zeigt sich ohne weiteres, daß diese Beziehung die Gestalt

$$2N\cdot\sqrt{\frac{p^2+y_0^2}{2N}}\cdot\cos(\alpha-\beta) = \frac{(M+N)}{p}\cdot\sqrt{2N}\cdot\cos\beta$$

oder

$$\sqrt{p^2+y_0^2}\cdot\cos(\alpha-\beta) = \frac{(M+N)}{p}\cdot\cos\beta$$

bekommt. Durch Umwandlung der linken Seite und Einführung von

$$M = \frac{p}{2}(p+2x_0)$$

erhält man

$$\frac{1}{2}(p-2x_0)\cdot\cos\beta + y_0\cdot\sin\beta = \frac{N}{p}\cdot\cos\beta,$$

und nach Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit $2N\cdot\sin\beta$ läßt sich die Identität unschwer erkennen. —

Endlich bleibt nur noch der Grenzübergang von der Neumannschen Konstanten B auszuführen. Ich gebe ihr die Form

$$B = 4\pi R^4 q_0^2 Q^2\left[\frac{Q^2}{k(1-2Q^2\cos 2\vartheta_0 + Q^4)\cdot k(q_0^2-Q^2)^2} + \frac{\sqrt{k}(1-Q^4)\cdot k(1-q_0^2\cos 2\vartheta_0 + q_0^2Q^2 - Q^2\cdot\cos 2\vartheta_0)}{k(1-2q_0^2\cos 2\vartheta_0 + q_0^4)\,k^2(1-2Q^2\cos 2\vartheta_0 + Q^4)^2\sqrt{k}(q_0^2-Q^2)}\right].$$

Hierin sind noch zwei Grenzwerte zu bestimmen. Es ist nämlich

$$\lim k\,(q_0^2 - Q^2)^2 = 4\,(L_1 - \lambda_{01})^2 = \frac{4}{p}\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2.$$

Die einzelnen Entwicklungen des Ausdruckes

$$1 - q_0^2\cdot\cos 2\vartheta_0 + q_0^2\,Q^2 - Q^2\cdot\cos 2\vartheta_0$$

werden:

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & 1 \\
q_0^2\,Q^2 = & & 1 - 2L - 2\lambda_0 + 2L^2 + 2\lambda_0^2 + 4L\lambda_0 + - \quad \cdots \\
-q_0^2\cdot\cos 2\vartheta_0 = & -1 & + 2\lambda_0 \qquad - 2\lambda_0^2 \qquad + 2\vartheta_0^2 \cdots \\
-Q^2\cdot\cos 2\vartheta_0 = & -1 + 2L & - 2L^2 \qquad + 2\vartheta_0^2 \cdots
\end{array}$$

Also ist

$$\lim k\,(1 - q_0^2\cdot\cos 2\vartheta_0 + q_0^2\,Q^2 - Q^2\cdot\cos 2\vartheta_0) = 4\,(\vartheta_{01}^2 + L_1\cdot\lambda_{01})$$
$$= 4\left(\frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta\right).$$

Man kann also den Grenzwert von B folgendermaßen darstellen:

$$\lim B = \frac{\pi R^4}{4}\left[\frac{p^2}{(p^2 + 2N\cdot\sin^2\beta)\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)^2} + \frac{p^4\left(\frac{2N}{p}\cdot\sin^2\beta + \sqrt{2N}\cdot\cos\beta\right)}{N\,(p^2 + 2N\cdot\sin^2\beta)^2)\,(p - \sqrt{2N}\cdot\cos\beta)}\right].$$

Die schon beim Grenzübergange von A angestellten Umformungen lassen sich ganz analog auch hier durchführen. Sie bringen den Grenzwert auf die Gestalt

$$\lim B = \frac{\pi R^4}{4\,(2\,p\,x_0 - y_0^2)^2}\left\{\left[\frac{(M+N)}{p^2}\,(p^2 + 2N\cdot\cos^2\beta) + 2\,(M - N)\right] + 2\left[\frac{(M+N)}{p^2}\,\sqrt{2N}\cdot\cos\beta + 2\,(M - N)\sqrt{\frac{p^2 + y_0^2}{2N}}\cos(\alpha - \beta)\right]\right\},$$

und der Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck für $\lim A$ läßt hierin ohne weiteres meine Konstante A erkennen. —

Damit ist die Aufgabe dieses Kapitels erfüllt. Es hat sich zeigen lassen, daß die Neumannschen Ergebnisse nicht allein der Form nach mit den meinigen übereinstimmen, sondern daß sich von ihnen auch die Resultate meiner Arbeit durch Grenzübergang herleiten lassen. —

Erläuterung zu den Zeichnungen

Ich habe die behandelten Fälle durch vier Zeichnungen dargestellt. Jede enthält die von Hause aus gegebene Parabel, deren Brennpunkt mit F bezeichnet ist; ferner den Inversionskreis mit dem Mittelpunkte M, der als Koordinatenanfang dient; endlich durch stärkere Zeichnung hervorgehoben die Randkurve der materiellen Fläche. Insbesondere ist zu bemerken:

Zu Figur 1:

Inversionszentrum und Brennpunkt fallen zusammen in den Punkt F. Der Punkt P ist entstanden durch Inversion von P_1.

Zu Figur 2:

Das Inversionszentrum liegt auf der Parabelachse zwischen Scheitel und Brennpunkt. Die materielle Fläche ist ersetzbar durch die beiden Punkte P_1 und P_2, die gleichen Abstand von P haben und auf der Achse liegen. P ist konjugiert zu Q.

Zu Fig. 3:

Das Inversionszentrum liegt auf der Parabelachse außerhalb Scheitel und Brennpunkt. Die materielle Fläche ist ersetzbar durch die beiden Punkte P_1 und P_2, die symmetrisch zur Achse liegen, und die Gerade $P_1 P_2$. Sie schneidet die Achse in P, dem zu Q konjugierten Punkte.

Zu Figur 4:

Das Inversionszentrum liegt beliebig innerhalb der Parabel. P_1 und P_2 sind verbunden durch die materielle Doppellinie.

In allen vier Zeichnungen stellt A den sollizitierten Punkt (Aufpunkt) dar. —

Lebenslauf

Ich, Hermann Julius Schütze, wurde geboren am 28. Mai 1890 zu Tangermünde als Sohn des Kaufmanns Hermann Schütze. Von 1896 bis 1906 besuchte ich die Höhere Privatschule meiner Vaterstadt, von 1906 bis 1909 die Guericke-Oberrealschule in Magdeburg, von der ich am 9. März 1909 mit dem Zeugnis der Reife entlassen wurde. Im Sommerhalbjahr 1909 arbeitete ich praktisch in den Werkstätten der Tangermünder Zuckerraffinerie. Vom Winterhalbjahr 1909/10 bis 1913 studierte ich in Halle Mathematik, Physik und Chemie. Nach anderthalbjähriger Teilnahme am Feldzuge bestand ich am 24. Februar 1917 die Prüfung für das höhere Lehramt. Meine Lehrer waren die Herren Professoren Boeke, Buchholz, Dorn, Eberhard, Fries, Gutzmer, Jaensch, Krüger, Loening, Menzer, Tubandt, Uphues, Vorländer und Wangerin. Ihnen allen bin ich zu großem Danke verpflichtet. Insbesondere aber ist es mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. A. Wangerin zu danken für die Anregung zu dieser Arbeit und ihre Förderung. —

Inhaltsverzeichnis

Seite

Allgemeiner Ansatz 1

I. Kapitel: Das Inversionszentrum liegt auf der Achse der Parabel. 3

§ 1. Das Inversionszentrum liegt im Brennpunkte 3
§ 2. Das Inversionszentrum liegt zwischen Brennpunkt und Scheitel . . . 5
§ 3. Das Inversionszentrum liegt außerhalb der Strecke Brennpunkt — Scheitel 9

II. Kapitel: Die gewonnenen Ergebnisse werden auch durch Grenzübergang von den Neumannschen abgeleitet 13

§ 1. Vorauszuschickende Bemerkungen 13
§ 2. Das Inversionszentrum liegt im Brennpunkte 15
§ 3. Das Inversionszentrum liegt zwischen Brennpunkt und Scheitel . . . 16
§ 4. Das Inversionszentrum liegt außerhalb der Strecke Scheitel — Brennpunkt 19

III. Kapitel: Das Inversionszentrum liegt in einem beliebigen Punkte innerhalb der Parabel 21

§ 1. Berechnung der Masse und Aufstellung der Integralformel 21
§ 2. Die Ausführung der Integration 24
§ 3. Aufstellung der Potentialformel 30
§ 4. Herleitung der Spezialfälle 34

IV. Kapitel: Die allgemeine Potentialformel wird auch durch Grenzübergang vom Neumannschen Resultate abgeleitet 35

Erläuterungen zu den Zeichnungen 44

Lebenslauf 45

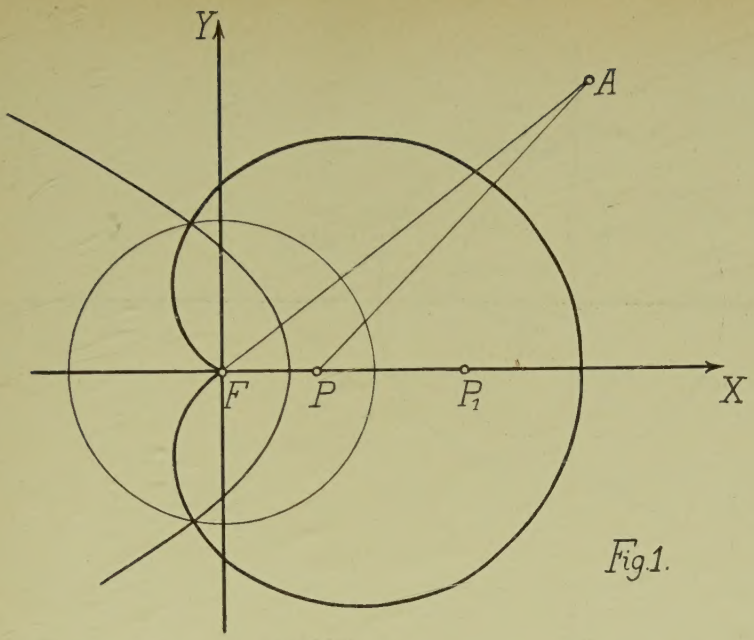

Fig.1.

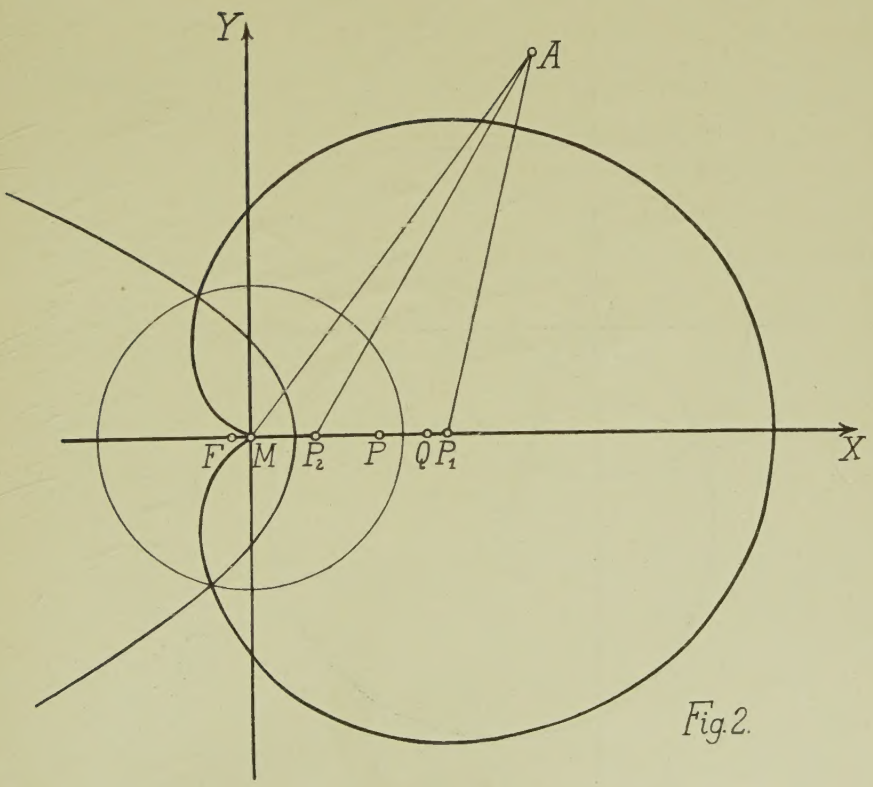

Fig.2.

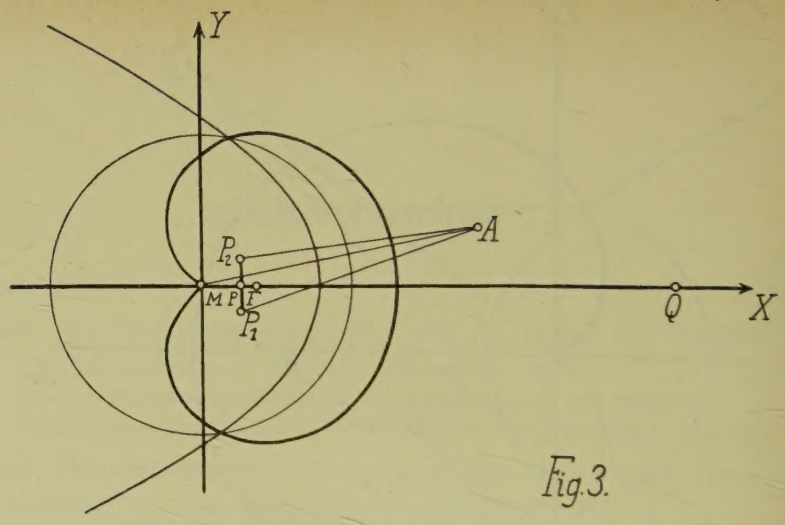

Fig. 3.

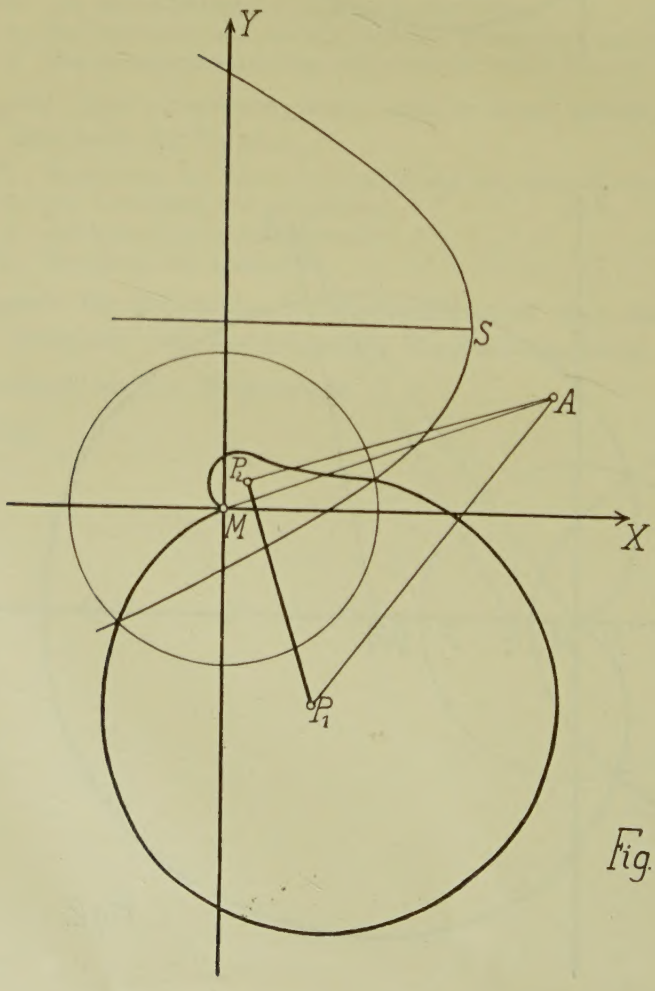

Fig. 4.